

# АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПОДВИЖНЫМ СОСТАВОМ

В трех частях

Часть 1

Теория автоматического управления

Под редакцией

Л.А. Баранова и А.Н. Савоськина

*Рекомендовано Экспертным советом по рецензированию  
Московского государственного университета путей сообщения,  
уполномоченным приказом Минобрнауки России  
от 15 января 2007 г. № 10, к использованию  
в качестве учебника для студентов, обучающихся  
по специальности 190300.65 «Подвижной  
состав железных дорог» ВПО.  
Регистрационный номер рецензии 676  
от 18 декабря 2012 г. базового учреждения  
ФГАУ «Федеральный институт развития образования»*

Москва  
2014

УДК 656.2:658.012.011.56

ББК 39.275

A22

Рецензенты: зав. кафедрой «ЭПС» РГУПС, д-р техн. наук, проф. *А.Д. Петрушин*; доцент кафедры «ЭПС» РГУПС, канд. техн. наук *Е.А. Чеботарев*; доцент кафедры «ЭПС» РГУПС, канд. техн. наук *Н.Р. Тептиков*; главный научный сотрудник ОАО «ВНИИЖТ», д-р техн. наук, проф. *В.А. Кучумов*

**A22 Автоматизированные системы управления электроподвижным составом:** учебник: в 3 ч. / Л.А. Баранов, А.Н. Савоськин, О.Е. Пудовиков и др.; под ред. Л.А. Баранова и А.Н. Савоськина. — М.: ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2014.

ISBN 978-5-89035-659-8

Ч. 1: Теория автоматического управления. — 400 с.

ISBN 978-5-89035-616-1

Рассмотрены основные понятия теории автоматического управления, дано обоснование экономической эффективности внедрения систем автоматизации электроподвижного состава. Приведены сведения о функциональных схемах и основных устройствах систем автоматического управления, представлена методика исследования линейных и нелинейных систем управления. Описаны методы определения реакции этих систем на детерминированные входные сигналы, введены основные понятия устойчивости систем автоматического управления.

Учебник состоит из трех частей, изданных отдельными книгами.

Предназначен для студентов вузов железнодорожного транспорта, обучающихся по направлению подготовки 190300 «Подвижной состав железных дорог» (квалификация «специалист»), специализации «Электрический транспорт железных дорог», изучающих дисциплину «Теория систем автоматического управления».

Может быть полезен инженерно-техническим работникам, связанным с проектированием и эксплуатацией подвижного состава.

УДК 656.2:658.012.011.56

ББК 39.275

ISBN 978-5-89035-616-1 (ч.1)

ISBN 978-5-89035-659-8

© Коллектив авторов, 2013

© ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2013



---

## Введение

Дисциплина «Теория автоматического управления» изучается студентами специальности «Электрический транспорт железных дорог» в течение одного семестра и состоит из курса лекций и лабораторных работ. Ее логическим продолжением является дисциплина «Системы управления электроподвижным составом и их автоматизация», в которой помимо курса лекций предусмотрены лабораторные и курсовые работы. В курсовой работе выполняется проектирование системы автоматического регулирования электроподвижного состава (э.п.с.) заданного типа, для чего используются материалы обеих дисциплин.

Содержание указанных дисциплин базируется на курсах «Высшая математика», «ТОЭ», «Электронная и преобразовательная техника», а также «Аналитическая механика». Из последнего курса потребуются знания по вопросам устойчивости движения, а также по способам решения дифференциальных уравнений.

Предлагаемый учебник соответствует учебным программам дисциплин «Теория автоматического управления», «Системы управления электроподвижным составом» и «Микропроцессорные системы управления» специальности «Электрический транспорт железных дорог». Каждая из этих дисциплин изучается в течение одного семестра.

Учебник состоит из трех частей. Первая часть посвящена теории автоматического управления. В этой части рассмотрены основные понятия об управлении на примерах электроподвижного состава. При рассмотрении функциональных схем отдельно изложены решения, применимые для любых технических объектов и для э.п.с.

Большое внимание уделено аналитическому описанию линейных непрерывных, линейных импульсных и нелинейных систем. Рассмотрена общая постановка задачи исследования устойчивости таких систем. Необходимость исследования линейных импуль-

сных систем обусловлена широким применением на э.п.с. микропроцессорных систем управления.

Во второй части приведены модели отдельных функциональных элементов систем управления э.п.с. При этом большое внимание уделено моделям основных объектов управления коллекторных и асинхронных тяговых двигателей. Кроме того, в этой части рассмотрены основные критерии устойчивости систем автоматики, критерии качества регулирования и способы решения задачи синтеза систем автоматического управления. Приведены примеры моделирования систем автоматического управления э.п.с.

Третья часть посвящена микропроцессорным системам управления. В этой части рассмотрены способы построения таких систем, их структура и алгоритмы управления э.п.с.

---

## Глава 1. ПОНЯТИЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ

### 1.1. Основные понятия

**Управление** — это целенаправленное действие, обеспечивающее получение необходимых результатов при проведении любого процесса (в качестве процесса можно рассматривать движение электровоза, работу тяговых электродвигателей (т.э.д.), работу пневматического тормоза и т.п.). Законы, по которым организуются целенаправленные действия, изучает специальная наука — **кибернетика** — наука об управлении, становление которой происходило в середине XX века.

Законы управления оказались одинаковыми для технических объектов и живых организмов. Впервые это единство было установлено американским ученым Норбертом Винером [10], которого по праву считают основателем кибернетики. Однако, появилась эта наука гораздо раньше — во второй половине XVIII — начале XIX века, когда были созданы первые автоматические устройства по регулированию уровня воды в котле паровой машины Ползунова и центробежный регулятор скорости вращения паровой машины Дж. Уатта. В XIX веке в связи с бурным ростом техники были выполнены первые научные работы в области кибернетики, которые ведутся и до настоящего времени. Большой вклад в развитие кибернетики был сделан такими отечественными учеными, как А.М. Ляпунов, А.И. Берг, В.М. Глушков, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, и многими другими.

Любой процесс управления состоит из следующих этапов:

1. *Получение начальной информации (НИ) об объекте и цели управления.*

Для э.п.с. к этому этапу относятся сведения о техническом устройстве, характеристиках и состоянии локомотива и поезда, навыки по управлению, сведения о поезде и участке обращения и т.п. Часть этой информации машинист получает в процессе обучения,

а часть — из документов, вручаемых ему перед отправлением (натурный лист, справки об автотормозах, о предупреждениях и ограничениях скорости и т.п.).

2. *Сбор рабочей информации (РИ) о ходе управляемого процесса и действующих возмущениях.*

Для э.п.с. в качестве рабочей информации можно рассматривать текущие значения времени хода  $t_x$ , скорости движения  $v$ , пройденного пути  $s$ , тока тяговых двигателей  $i$  и т.п. К возмущениям относятся: напряжение в контактной сети  $u_{кс}$ , сопротивление движению  $w$  и коэффициент сцепления  $\psi$ .

3. *Сопоставление рабочей информации с начальной и выработка алгоритма управления.*

Алгоритм — это совокупность правил, по которым выполняется решение любой задачи.

4. *Исполнение алгоритма или управление.*

Первые три этапа требуют затрат умственного труда и называются *кибернетическими* или *распорядительными*. Содержанием этих этапов является передача и преобразование информации. Носителями информации являются *сигналы* — физические величины, количественные показатели которых характеризуют передаваемую информацию. Например, сигналами скорости могут быть: напряжение тахогенератора, число импульсов или частота их появления и т.п. Замену умственного труда человека машинным при выполнении этих этапов называют *автоматизацией* производственных процессов.

Четвертый этап требует затрат физического труда и его называют *энергетическим* или *исполнительным*. Замену физического труда человека машинным при выполнении четвертого этапа называют *механизацией* производственных процессов. Для перехода к автоматизации необходимо предварительно заменить физический труд машинным, т.е. выполнить механизацию процесса. Поэтому механизация является необходимой предпосылкой автоматизации. Поскольку на э.п.с. все процессы управления механизированы (машинист только переводит рукоятки контроллера), то э.п.с. в большой мере подготовлен к оборудованию автоматическими системами управления.

*Автоматической* называют такую систему управления, в которой автоматизированы все процессы, за счет чего не требуется вме-



шательства человека в ее работу. Систему, в которой человек принимает участие в процессе управления только при выработке ответственных решений, называют *автоматизированной*.

## 1.2. Уровни автоматизации

Различают пять уровней автоматизации.

**Ручное** или **неавтоматическое управление**. На данном уровне все этапы процесса управления выполняет человек-оператор. Этот уровень широко применен на э.п.с., при этом машинист оценивает пройденный путь, время хода, а также скорость движения, т.е. рабочую информацию РИ, сопоставляет эту информацию с длиной перегона, допустимыми скоростями движения и заданным временем хода по графику, т.е. с начальной информацией НИ, учитывает уровень напряжения в контактной сети — возмущение. По этим данным машинист выбирает режим работы э.п.с. (алгоритм) и управляет рукоятками контроллера и кранов машиниста, реализуя выбранный алгоритм. Таким образом, ручное управление э.п.с. полностью механизировано.

**Автоматизационное связывание**. При этом последовательность выполняемых операций обеспечивается автоматически, но по команде оператора. Различают порядково-временное и функциональное связывание. Данный уровень автоматизации широко использован на э.п.с. *Порядково-временное* связывание состоит в том, что начало (конец) одного процесса ставят в зависимость от начала (конца) другого (других) процессов, и применяется при переходах с одной ходовой позиции на другую с помощью блокировок линейных контакторов и «разверток» групповых переключателей.

*Функциональное* связывание состоит в том, что начало (конец) одного процесса определяется значением некоторого показателя другого процесса. Этот вид связывания широко используют в системах защиты э.п.с. и в системах автоматического пуска электропоездов и вагонов метрополитена. В системах автоматического пуска переход группового переключателя на следующую позицию происходит после того, как ток тягового электродвигателя уменьшится до величины тока уставки реле ускорения.

**Автоматическое управление**. На этом этапе обеспечивается изменение управляемой величины по заданному закону при помощи

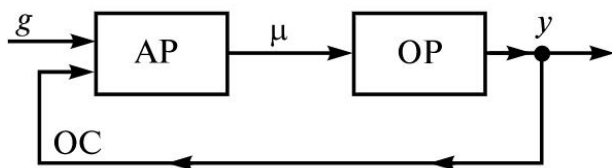


Рис. 1.1. Схема автоматического регулирования

автоматического регулятора (АР), управляемого человеком.

При этом систему автоматического управления (САУ) можно представить в виде схемы (рис. 1.1), состоящей из

двух элементов: объекта управления (ОУ) и автоматического регулятора (АР). Причем АР связывает выход ОУ (управляемую величину  $y$ ) с его входом (управляющей величиной  $\mu$ ), реализуя таким образом замкнутую систему автоматического регулирования, т.е. систему с обратной связью (ОС). Изменение заданного значения управляемой величины (сигнал  $g$ ) выполняет человек-оператор (на э.п.с. — машинист).

Первые САУ на э.п.с. появились в цепях управления вспомогательных машин: мотор-компрессоров, генераторов управления и мотор-вентиляторов. После внедрения тиристорных преобразователей появились САУ тяговых электродвигателей (т.э.д.). В нашей стране такие системы впервые были использованы на грузовых электровозах ВЛ80Т и ВЛ80С в блоке управления реостатным торможением (БУРТ) в режиме реостатного торможения.

Позднее САУ была использована на электровозах ВЛ80Р в блоке управления выпрямительно-инверторным преобразователем (БУВИП) в режиме рекуперации. Эта САУ выполняет управление инвертора на постоянство угла запаса  $\delta$  и получила название БРУЗ — блок регулирования угла запаса. Затем появились САУ рекуперативного торможения для электровозов ВЛ10У, ВЛ11.

Более совершенные САУ были разработаны для электровозов ВЛ85 и ВЛ65. В них выполняется автоматическое управление скоростью движения и токами т.э.д., вследствие чего имеется два задающих сигнала, пропорциональных заданным значениям тока тяговых двигателей  $I_3$  и скорости движения  $v_3$ :  $g_1 \equiv v_3$  и  $g_2 \equiv I_3$ .

Блок автоматического управления этих электровозов, называемый БАУ, управляет работой блока БУВИП, такого же как и на электровозах ВЛ80Р. Аналогичными системами оборудованы и новые электровозы — ЭП10, 2ЭС4К, 2ЭС6.

**Интеллектуальное автоматическое управление** применяется для управления разнородными технологическими процессами и включает в себя все САУ для каждого процесса. На э.п.с. такие системы

используют для управления движением, и в качестве отдельных САУ сюда входят САУ тока т.э.д., САУ пневматического тормоза, САУ скорости, САУ времени хода и т.п.

САУ э.п.с. выполняют автоматическое ведение поезда по перегону, включая трогание и разгон, торможение у платформ (для пассажирских и пригородных поездов, а также поездов метрополитена), обеспечивая выполнение графика движения с минимальным расходом электроэнергии на тягу поездов. Поэтому САУ э.п.с. называют системами автоведения поездов (САВП) [29].

Несмотря на высокий уровень автоматизации, достигаемый с применением САУ, в этих системах за машинистом остаются важные функции по обеспечению безопасности движения и управления движением. Поэтому САУ э.п.с. являются автоматизированными системами управления.

**Телемеханическое управление** обеспечивает управление объектами, удаленными от центрального поста, и применяют его для управления отдельными секциями э.п.с., локомотивами, рассредоточенными по длине поезда, а также в комплексных системах управления э.п.с., энергоснабжением, сигналами на перегонах и работой промежуточных станций. В таких комплексных системах обмен информацией между движущимися локомотивами и станционными «напольными» устройствами осуществляется специальными методами *телемеханики*. При этом РИ передается по линиям связи, в качестве которых используют рельсовые цепи, радиосвязь, проводные линии, контактную сеть и т.п.

Первые САУ для э.п.с. были разработаны в нашей стране в 50-х — 60-х годах XX в. и получили название «Автомашинист». Первый «Автомашинист» был выполнен на радиолампах и установлен на электропоезде  $С_3^Р$ . Эта система в целом выполняла заданные функции, однако из-за применения радиоламп она была ненадежной. Следующие системы САУЭР (электропоездов ЭР1) и САУМ (вагонов метрополитена), выполненные на феррито-транзисторных ячейках, работали значительно лучше, но также имели недостаточно высокий уровень надежности из-за того, что соединения проводов были выполнены с помощью пайки.

Новое развитие эти системы получили с появлением больших интегральных микросхем (БИС) и микропроцессорных систем уп-

равления (МПСУ). В настоящее время МПСУ установлены на электровозах ЭП1, ЭП10, 2ЭС5К, а также они используются на всех вновь выпускаемых типах электровозов — 2ЭС4К, 2ЭС6 и электропоездов. Эти МПСУ выполняют функции управления безопасностью движения (КЛУБ-М), автоматического управления пневматическими тормозами (САУТ), автоведения поездов (САВП), автоматического управления скоростью движения, работой электропривода с коллекторными или асинхронными т.э.д., работой преобразователей для вспомогательных цепей.

### **1.3. Техничко-экономическая эффективность автоматизации**

Любое новое устройство, устанавливаемое на локомотиве, должно компенсировать дополнительные затраты на его изготовление и установку, т.е. должно окупаться. Кроме того, такое устройство должно повышать эффективность работы локомотива, т.е. должно приносить определенный доход. Рассмотрим коротко источники экономической эффективности автоматических систем, применяемых на электроподвижном составе.

Системы автоматического управления э.п.с. обеспечивают повышение тяговых (тормозных) и сцепных свойств, увеличивают среднеэксплуатационный КПД, уменьшают потребление реактивной мощности (на э.п.с. переменного тока) и т.п. Эти системы могут выполнять функции по обеспечению безопасности движения, решают задачи автоведения поезда с минимальным расходом электроэнергии за заданное графиком движения время хода по перегонам.

Автоматическое управление вспомогательными устройствами позволяет использовать с этой целью электропривод с асинхронными двигателями и современными компактными и надежными полупроводниковыми преобразователями, что обеспечивает снижение расхода электроэнергии на собственные нужды и на ремонт устройств собственных нужд.

Внедрение э.п.с. с коллекторными тяговыми двигателями и независимым возбуждением (электровоз 2ЭС6), а также с асинхронными тяговыми двигателями вообще невозможно без автоматического управления напряжением и частотой (в случае использования асинхронных) тяговых двигателей. В такой же мере системы



автоматики необходимы и для высокоскоростного подвижного состава, при управлении которым на принятие решений и выполнение управляющих действий остается настолько мало времени, что машинист физически не может обеспечить безопасность движения.

Таким образом, применение систем автоматики на э.п.с. обеспечивает реализацию следующих источников экономической эффективности:

- снижает расход электроэнергии на тягу поездов;
- дает возможность повысить техническую скорость движения или массу поезда, что в конечном итоге ведет к повышению пропускной и провозной способности железных дорог;
- повышает сохранность оборудования э.п.с. и снижает расходы на его ремонт и т.п.

Некоторые источники эффективности трудно оценить экономически. К ним относятся улучшение условий труда локомотивных бригад, повышение безопасности движения и т.п.

---

## Глава 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СХЕМЫ САУ ЭЛЕКТРОПОДВИЖНОГО СОСТАВА

### 2.1. Понятие о функциональной схеме и устройстве

В автоматике помимо принципиальных, монтажных и т.п. схем принято использовать функциональные и структурные схемы (последние будут рассмотрены в последующих главах).

*Функциональная схема* подразделяет исследуемую систему на различные устройства в зависимости от выполняемых ими функций.

Устройство состоит из отдельных элементов. Элементом называют конструктивно *обособленную* часть системы, выполняющую определенные функции. Такими элементами могут быть электрические машины, аппараты, преобразователи и т.п. Автоматические системы различной физической природы можно представить в виде однотипных функциональных схем, состоящих из одинаковых функциональных элементов.

Элементы подразделяют по принципу действия (электромеханические, электромашинные, электромагнитные, пневматические, электронные и т.п.), по исполнению (общепромышленное, тяговое и т.п.), по конструкции, а также по функциональному назначению.

В зависимости от функционального назначения устройства систем автоматического управления подразделяют на:

- задающее устройство (ЗУ) — вводит в САУ сигнал  $g$ , пропорциональный заданному значению регулируемой величины  $y$ ; т.е. вводит начальную информацию (НИ);
- программное устройство (ПРУ) — преобразует сигнал  $g$  в  $g^*$  по заданной программе;
- измерительное устройство (ИУ) — вводит в САУ сигнал  $z$ , пропорциональный текущему значению регулируемой величины  $y$ , а также сигналы  $q_i^*$ , характеризующие уровень действующих возмущений  $q_i$  и состояние окружающей среды, т.е. обеспечивает САУ рабочей информацией;

— устройство сравнения (УС) — сравнивает сигналы  $g$  и  $z$  и определяет ошибку или рассогласование:

$$\Delta = g - z; \quad (2.1)$$

управляющее устройство (УУ) — формирует управляющий сигнал  $x$  в зависимости от рассогласования  $\Delta$  и уровня действующих возмущений  $q_i^*$ :

$$x = f(\Delta, q_i^*), \quad (2.2)$$

т.е. вырабатывает алгоритм управления.

Часто устройство УУ делят на две части: регулятор (Р), формирующий сигналы  $x$  и собственно управляющее устройство, реализующее алгоритм управления (например, формирование и подачу импульсов открывания тиристоров на определенные плечи преобразователя);

— исполнительное устройство (ИсУ) — осуществляет непосредственное воздействие  $\mu$  на объект управления в зависимости от сигнала  $x$ .

При автоматизации э.п.с. принято управляющее устройство разделять на две части — собственно управляющее устройство, формирующее закон управления, и устройство преобразования УП сигнала управления в сигнал, необходимый для управления исполнительным устройством. Такое разделение вызвано тем, что при ручном управлении э.п.с. сигнал управления от ЗУ (на э.п.с. — контроллер машиниста) передается на УП.

Исторически сложилось, что в технической документации на э.п.с. фактическую реализацию устройства управления называют *регулятором*. Поэтому в данной книге для сведения терминологии к принятой в теории управления введено понятие «*автоматический регулятор*», отличающийся от регулятора тем, что в его состав входят ИУ, УС и УУ, которые обычно конструктивно выполняют в едином блоке.

Изображение всех элементов на функциональных схемах, кроме устройства сравнения, показано на рис. 2.1.

На данном рисунке входным сигналом, подаваемым на элемент, является сигнал  $x$ , а выходным —  $\mu$ .

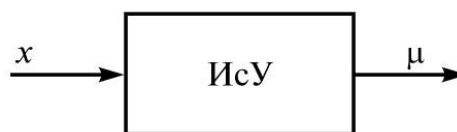


Рис. 2.1. Изображение элементов на функциональных схемах

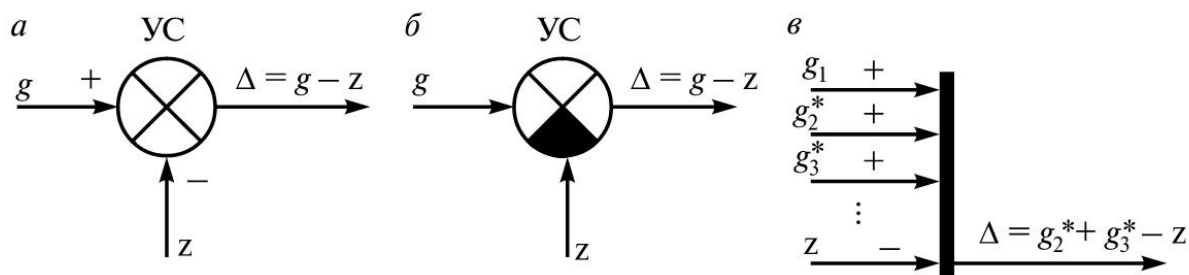


Рис. 2.2. Изображение устройства сравнения на схемах

Устройство сравнения обозначается на схемах, приведенных на рис. 2.2, а, б, в.

## 2.2. Типовые функциональные схемы и принципы управления

Функциональные схемы систем автоматического управления можно свести к трем основным типам [8], которые соответствуют различным принципам управления: управлению по возмущению, управлению по отклонению и комбинированному управлению.

**Принцип управления по возмущению** был предложен французским ученым Понселе и впервые реализован русским электротехником В.Н. Чиколевым во второй половине XIX в. в регуляторах силы света дуговых электроламп.

Основной причиной, отклоняющей регулируемую величину от требуемого значения, является воздействие всякого рода возмущений. При управлении по рассматриваемому принципу предполагают, что *если измерить величину основного возмущения и в соответствии с результатами измерения оказать управляющее воздействие на объект, то можно обеспечить поддержание управляемой величины на заданном уровне.*

Управляющее воздействие  $x$  на исполнительное устройство вырабатывается управляющим устройством на основе сигнала  $g$ , пропорционального заданному значению управляемой величины, а также на основе измерения возмущения (помехи или нагрузки)  $q_i$ . Таким образом, управляющее воздействие  $x$  направлено на компенсацию возмущения  $q_i$ , что должно обеспечивать независимость управляемой величины  $y$  от возмущения  $q_i$ . Закон управления в общем виде является оператором от задающего сигнала и возмущения:

$$x = f \left( g, q^*, \frac{d\dot{q}^*}{dt}, \dots, \frac{d^n \dot{q}^*}{dt} \right). \quad (2.3)$$



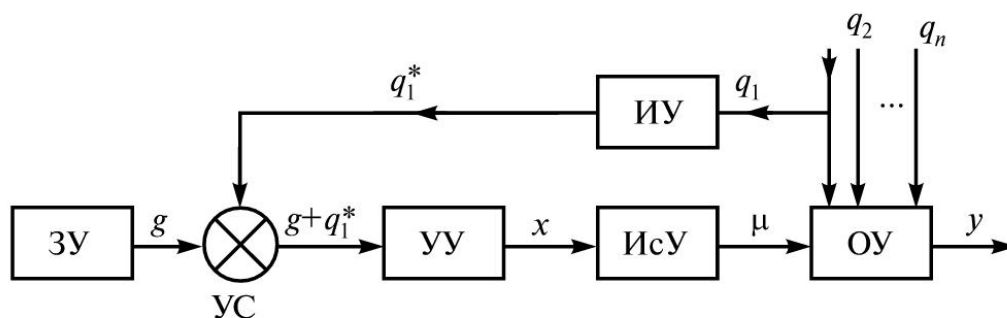


Рис. 2.3. Функциональная схема САУ по возмущению

На рис. 2.3 изображена схема, поясняющая принцип управления по возмущению.

Система управления по возмущению является разомкнутой, в ней отсутствует обратная связь. Обычно системы управления подвержены воздействию большого количества возмущений. Вместе с тем, без существенного усложнения удастся создать САУ, компенсирующую действие одного, реже двух возмущений. В таких системах обеспечивается независимость только по отношению к тем возмущениям, которые контролируются. Наличие же неконтролируемых возмущений (для э.п.с. — сцепление  $\psi$  и сопротивление движению  $w$ ) приводит к тому, что выдержать точно требуемое значение управляемой величины обычно не удастся.

Этот недостаток вызван тем, что при отсутствии в САУ обратной связи значение управляемой величины не контролируется и управляющее воздействие от этой величины не зависит. Поэтому САУ с управлением по возмущению применяют практически только в качестве составной части более сложных — комбинированных систем.

На э.п.с. принцип управления по возмущению использован в блоке регулирования угла запаса инвертора типа БРУЗ электропоездов ВЛ80Р, ВЛ85 и ВЛ65.

**Принцип управления по отклонению** (по ошибке) был впервые реализован на практике И.И. Ползуновым в 1765 г. в регуляторе уровня воды в котле паровой машины. Позднее в 1784 г. этот принцип был использован Дж. Уаттом в регуляторе скорости вращения паровой машины.

Принцип управления по отклонению (рис. 2.4) состоит в том, что АР воспринимает сигнал  $z$ , пропорциональный текущему значению управляемой величины  $y$ , сопоставляет его с сигналом  $g$ , пропорциональ-

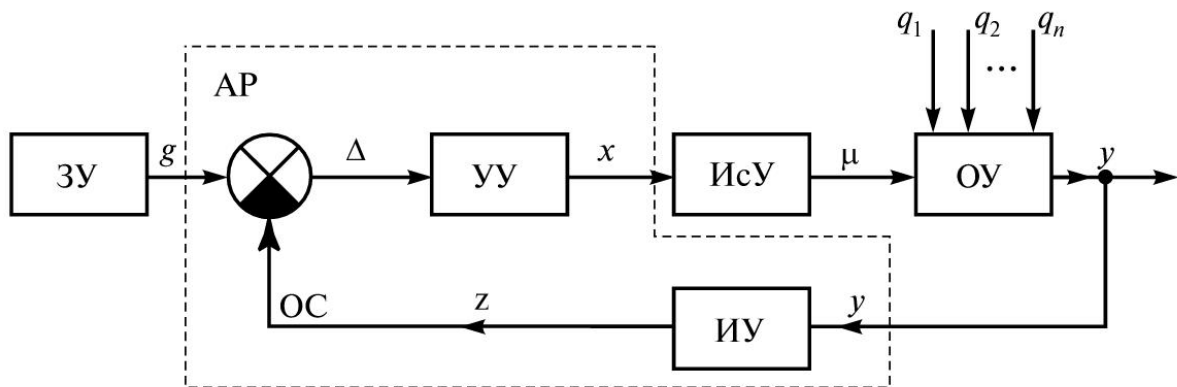


Рис. 2.4. Функциональная схема САУ по отклонению (ошибке)

ным заданному ее значению, и в зависимости от отклонения (ошибки, рассогласования)  $\Delta = g - z$  вырабатывает управляющее воздействие  $x$  таким образом, чтобы эту ошибку свести к минимуму.

Закон управления в этом случае определяется соотношением

$$x = f\left(\Delta, \frac{d\Delta}{dt}, \dots, \frac{d^n \Delta}{dt^n}, \int \Delta dt, \dots\right). \quad (2.4)$$

Основное преимущество САУ, работающих по отклонению, заключается в способности выполнять задачу управления независимо от возмущающих воздействий. Выявляя в соответствии с этим законом сам факт появления ошибки, система по возможности обеспечивает ее ликвидацию.

САУ, реализующая принцип управления по ошибке, работает как *замкнутая система*, т.е. представляет собой систему с *обратной связью* (см. рис. 2.4). Обратная связь ОС в замкнутой САУ служит для связи выхода системы с ее входом.

Принцип управления по отклонению широко применен на зарубежном и отечественном э.п.с. в регуляторах скорости, тока и т.п.

**Комбинированный принцип управления** позволяет получить наиболее высокое качество управления, так как замкнутую САУ по отклонению дополняют управлением по возмущению (рис. 2.5), совмещая управление по замкнутому и разомкнутому циклам.

В соответствии с этим рисунком, влияние возмущения  $q_1$  учитывается управлением по этому возмущению, а действие всех возмущений  $q_2, q_3, \dots, q_n$  управлением по отклонению.

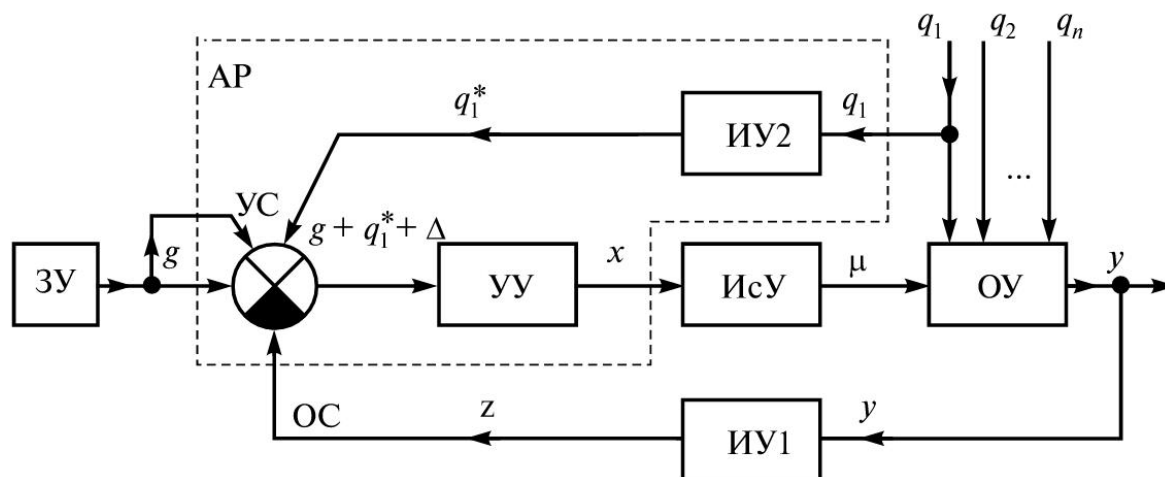


Рис. 2.5. Функциональная схема комбинированной САУ

На э.п.с. в качестве измеряемого возмущения выступает напряжение контактной сети  $u_{\text{КС}}$ , так как другие возмущения — сопротивление движению  $w$  и коэффициент сцепления  $\psi$  измерить не представляется возможным.

Таким образом, если в системе автоматического управления током тяговых электродвигателей э.п.с. применить управление по отклонению и возмущению в виде напряжения в контактной сети, то появится возможность лучше реализовать заданное значение тока тяговых двигателей независимо от изменений напряжения в контактной сети. Такая комбинированная САУ была применена на электровазоне ЭП1 с микропроцессорной системой управления.

## 2.3. Классификация систем автоматического управления

Рассмотрим классификацию САУ по следующим основным признакам.

**1. По характеру сигнала.** Распорядительные сигналы САУ имеют малую мощность и легко искажаются различными возмущениями — помехами, особенно электромагнитными. Для обеспечения нормальной работоспособности САУ должны обладать высокой помехоустойчивостью, т.е. их работа не должна нарушаться при воздействии помех. С этой целью обычно выполняют преобразования непосредственных (аналоговых) сигналов, с помощью которых передается распорядительная информация. По характеру распорядительных сигналов различают системы с непрерывным сигналом, импульсным, модулированным и цифровым сигналами.

**Системы с непрерывным сигналом** отличаются тем, что информация  $z(t)$  и (или)  $q^*(t)$  вводится в эти системы в виде непрерывных сигналов. Их подразделяют на две подгруппы:

- системы с *непосредственным вводом* сигнала — это такие системы, в которых распорядительный сигнал, например  $z(t)$ , непосредственно используется для целей управления без всяких преобразований (рис. 2.6, а). Эти системы являются наименее помехозащищенными;

- системы с *модулированным сигналом*. Модуляцией называют наложение информационного сигнала  $z(t)$  на сигнал-переносчик. Информационный сигнал называют модулирующей функцией. При гармоническом переносчике результирующий сигнал  $z^*(t)$  будет непрерывным. При этом можно выполнить амплитудную, частотную или фазовую модуляции, при которых изменяется соответственно амплитуда, частота или фаза сигнала-переносчика.

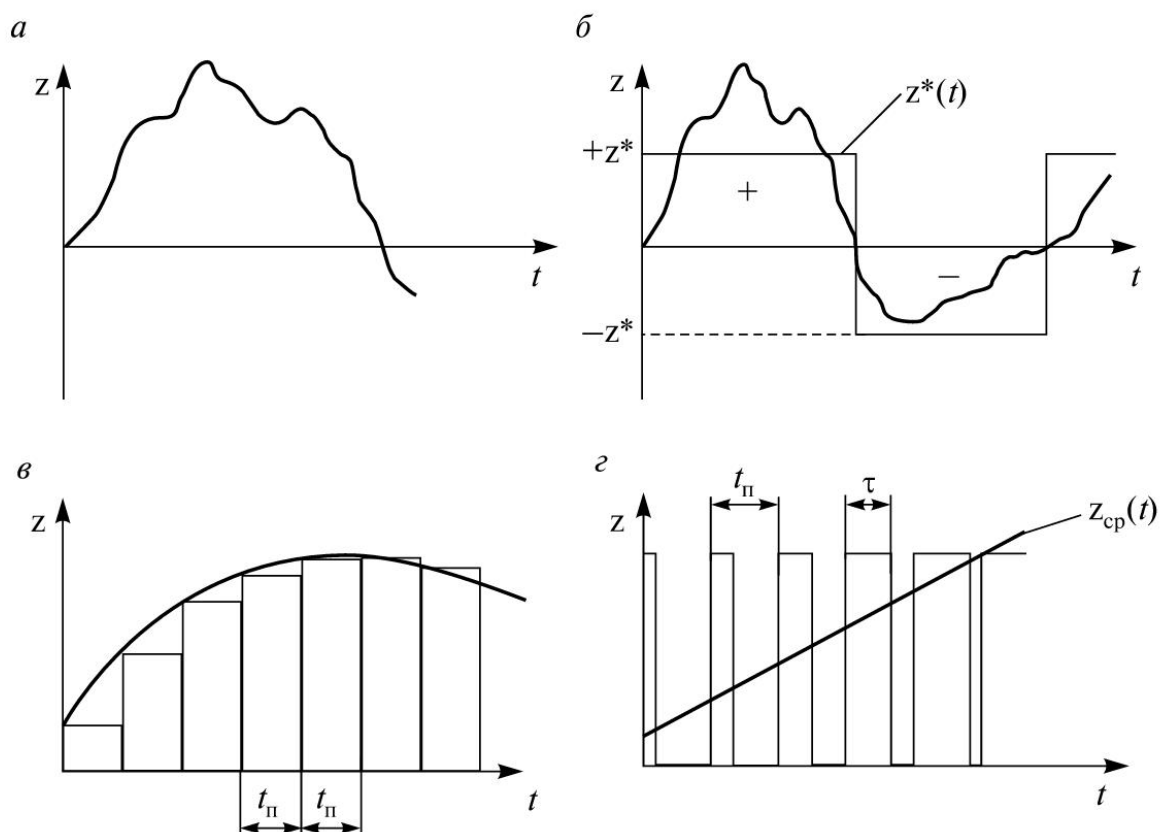


Рис. 2.6. Виды сигналов САУ:

а — непрерывный (аналоговый); б — релейный; в — ступенчатый;  
г — с широтно-импульсной модуляцией



**Системы с импульсным сигналом** отличаются тем, что непрерывная информация  $z(t)$  и (или)  $q^*(t)$  вводится в эти системы в виде импульсов, отличающихся определенными импульсными признаками: полярностью, амплитудой, частотой и т.п. Эти системы повышают помехозащищенность и подразделяются на несколько групп:

- системы с *релейным* сигналом (релейные САУ) — см. рис. 2.6, б. В таких системах независимо от конкретного вида непрерывного сигнала  $z(t)$  распорядительный сигнал  $z^*(t)$  на выходе релейного преобразователя принимает только одно из двух значений  $+z^*$  или  $-z^*$ , соответствующих знаку непрерывного сигнала. За счет такого преобразования влияние помехи на сигнал  $z^*(t)$  исключается.

- системы со *ступенчатым* сигналом — см. рис. 2.6, в. В этих системах непрерывный сигнал заменяется постоянным сигналом длительностью  $t_{\Pi}$ , величина которого равна величине сигнала  $z(t)$  в момент времени  $i$ ,  $t_{\Pi}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ );

- системы с *импульсной модуляцией*. В этих системах сигналом-переносчиком информации является последовательность импульсов, в которой выполняют амплитудно-, частотно-, широтно- или фазоимпульсную модуляции, при которых модулирующий сигнал изменяет соответственно амплитуду, частоту, ширину (см. рис. 2.6, г) или положение импульса относительно тактовых отметок;

- системы с *кодowymi сигналами*, в которых информационному сигналу соответствует некоторый набор импульсных признаков. Например, полярность и число импульсов. На э.п.с. применяют числовой кодовый сигнал в системах автоматической локомотивной сигнализации АЛСН;

- системы с *цифровым* сигналом, в которых непрерывный (аналоговый) распорядительный сигнал преобразуется в цифровую форму с помощью аналогово-цифрового преобразователя (АЦП), выполняющего квантование входного аналогового сигнала  $z(t)$  по уровню и его временную дискретизацию.

Подробнее процессы модуляции и аналого-цифрового преобразования рассмотрены в главе 7.

**Системы со случайными сигналами.** В этих системах информация, поступающая в виде непрерывного или импульсного сигнала, представляет собой случайный процесс. На э.п.с. такими случайными процессами являются сигналы  $u_{\text{КС}}(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $w(t)$ . Для расчета и про-

ектирования систем со случайными сигналами применяют специальные методы.

**2. По принципу действия** системы автоматического управления подразделяются на:

- **системы стабилизации**, которые поддерживают регулируемую величину на заданном уровне. Реализуются с помощью принципа регулирования по отклонению (см. рис. 2.4);

- **программные системы**, которые обеспечивают изменение регулируемой величины по заданной программе. Содержат программный элемент;

- **следящие системы**, осуществляющие слежение за какой-либо координатой объекта. Заданный сигнал в этих САУ изменяется непрерывно, и регулируемая величина должна изменяться в соответствии с изменением заданного сигнала. На э.п.с. данные системы находят применение в системе управления главного переключателя на электровозах ЧС2, ЧС4, ВЛ80С, а также при управлении током двигателя после окончания разгона и выхода на заданную скорость движения;

- **адаптивные (самонастраивающиеся) системы**, которые применяются в условиях неопределенности, связанной с незнанием параметров ОУ. Такая неопределенность, как правило, возникает из-за отклонений в свойствах исходных материалов и неоднородности в технологии изготовления изделий. Кроме того, на э.п.с. изменения параметров ОУ вызываются изменениями:

- электромагнитных параметров т.э.д. из-за нелинейности его характеристик и нагрева обмоток в процессе эксплуатации;

- параметров и даже структуры силовых цепей в процессе управления, из-за выведения пусковых сопротивлений, переключения схемы соединения т.э.д., а также из-за изменения силовой схемы э.п.с. при коммутации тиристорных преобразователей;

- параметров тяговой сети при движении э.п.с. по перегону;

- условий сцепления в зависимости от состояния рельсов, массы поезда, а также загрузки пассажирами вагона электропоезда или поезда метрополитена.

Самонастраивающиеся САУ подразделяют на три группы:

- **прямые самонастраивающиеся системы** (рис. 2.7, а). Такие системы применяют, когда свойства объектов регулирования и параметры регулятора полностью определены внешними факто-

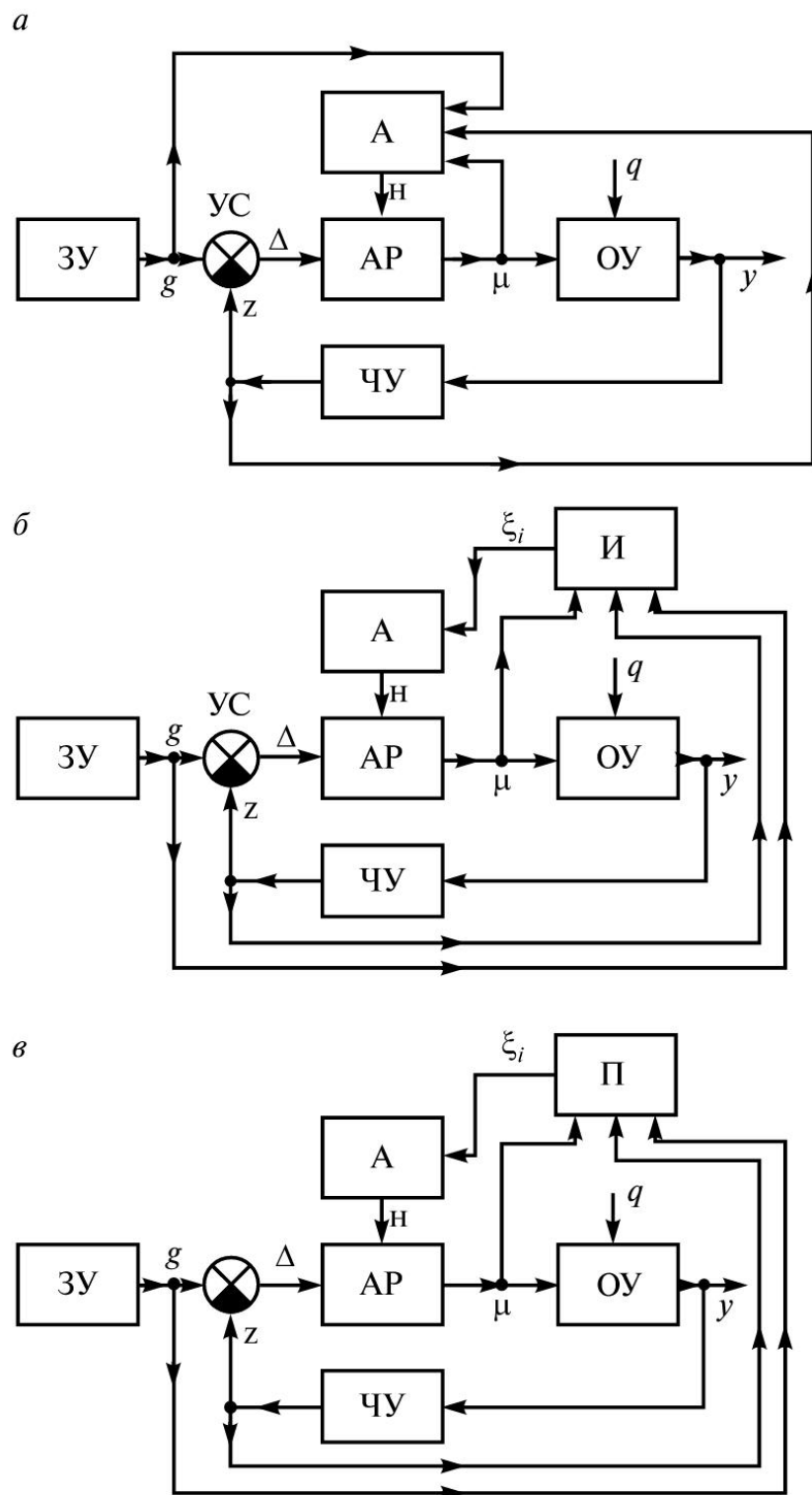


Рис. 2.7. Функциональные схемы самонастраивающихся адаптивных САУ:  
*a* — прямые; *б* — непрямые; *в* — квазипрямые

рами, доступными прямому измерению. При этом адаптер А полностью определяет настройку  $n$  автоматического регулятора АР. На э.п.с. такой способ адаптации применяют для учета массы поезда и загрузки вагона пассажирами. На электропоездах в качестве сигнала настройки используют величину тока уставки реле ускорения;

— *непрямые самонастраивающиеся системы* (рис. 2.7, б). Данная схема содержит идентификатор И. В таких системах по результатам измерений задающего  $g$  и регулирующего  $\mu$  воздействий, а также реакции  $y$  объекта регулирования ОР на это воздействие может быть выполнена идентификация, т.е. уточнение параметров  $\xi_i$  этого объекта и действующих возмущений  $q$ . В зависимости от найденных параметров  $\xi_i$  адаптер А изменяет настройку  $N$  автоматического регулятора АР. На э.п.с. этот способ адаптации применяют для уточнения электромагнитных параметров силовых цепей, массы грузового поезда, параметров тормозной системы и т.п.;

— *квазипрямые адаптивные системы* (рис. 2.7, в). Функциональная схема содержит предсказатель П и адаптер А.

Предсказатель состоит из модели предсказания, которая отличается как от модели объекта, так и от модели регулятора и алгоритма предсказания, в соответствии с которым находит оценки некоторых вспомогательных параметров, необходимых для работы адаптера А. Таким образом, квазипрямые адаптивные САУ используют способы управления, отличающиеся от применяемых в предыдущих системах.

В частности на э.п.с. такие системы применяют для управления силой тяги с адаптацией по сцеплению. Если в такой системе происходит 2—3 повторных срыва сцепления, то снижают силу тяги соответствующей оси, а через некоторое время ее вновь повышают и т.п.

**3. По числу каналов управления.** По этому признаку САУ подразделяют на *одноканальные* и *многоканальные*. Под каналом управления понимают цепь воздействия на один объект управления. При наличии нескольких таких цепей или нескольких объектов система будет многоканальной. На э.п.с. имеется несколько тяговых двигателей, на каждый из которых можно воздействовать изменяя напряжение на зажимах  $u_k$ , коэффициент регулирования поля  $\beta$  или (и) напряжение независимого возбуждения  $u_b$ . Поэтому в общем случае САУ э.п.с. являются многоканальными.

**4. По числу контуров управления.** По этому признаку САУ подразделяют на *одноконтурные* и *многоконтурные*. В каждый контур управления входят функциональные элементы, обеспечивающие управление одной регулируемой величиной. На э.п.с. может выполняться управление скоростью движения, а также токами якоря и токами возбуждения. Поэтому в общем случае САУ э.п.с. являются не только многоканальными, но и многоконтурными.

## 2.4. Типовые функциональные схемы САУ электроподвижного состава

**Системы стабилизации тока и скорости.** Такие системы являются одноконтурными и наиболее простыми. Работают по замкнутому циклу, т.е. с управлением по отклонению.

Задающим устройством ЗУ (рис. 2.8) обычно является контроллер машиниста, с помощью которого устанавливают заданное значение тока  $I_3$  или скорости  $v_3$  — сигнал  $u_1$ . В качестве ИсУ в системах с релейно-контакторным управлением используют групповой переключатель, который в системах стабилизации скорости на электропоездах, поездах метро и электровозах изменяет сопротивление пусковых резисторов при разгоне, а также напряжение на двигателях (при изменении группировки). В этом случае УУ должен задать номер позиции  $N$  группового переключателя. Кроме того, ИсУ может изменять ступенчато коэффициент регулирования поля  $\beta$  или  $u_B$  при независимом возбуждении тяговых электродвигателей.

Системы стабилизации скорости реализуют абсолютно жесткую характеристику  $v = \text{const}$ , наиболее подходящую для тяги, так как при такой характеристике обеспечиваются наиболее благоприятные условия сцепления колеса с рельсом.

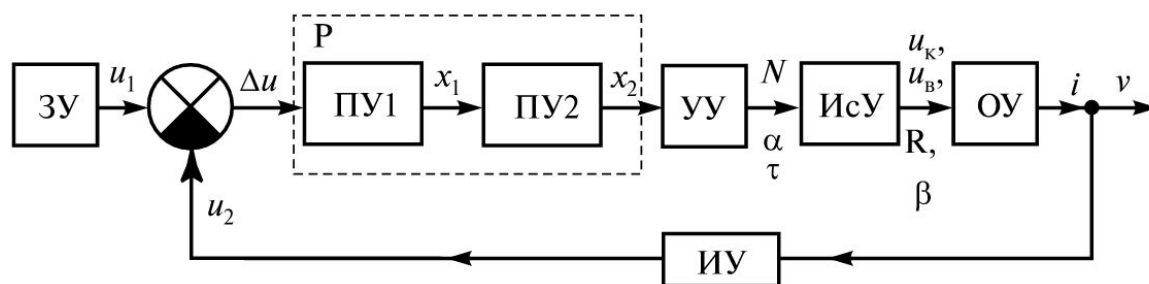


Рис. 2.8. Функциональная схема одноконтурной САУ стабилизации тока или скорости э.п.с.



Для уменьшения частоты переключения группового переключателя в состав Р вводят промежуточное устройство ПУ1 с зоной нечувствительности шириной в 10—15 км/ч. Когда скорость движения выходит за пределы этой зоны, на выходе ПУ1 появляется сигнал  $x_1$  о включении режима тяги.

При этом ПУ2 управляет групповым переключателем так, чтобы реализовать ходовую позицию, соответствующую фактической скорости движения. Если отклонение по скорости  $\Delta u$  не выходит за пределы зоны нечувствительности, то ПУ1 формирует сигнал  $x_1$ , соответствующий режиму выбега.

На современном э.п.с. в качестве ИсУ применяют полупроводниковые силовые преобразователи, которые могут выполнять плавное изменение  $u_k$ ,  $u_v$  или (и)  $\beta$ .

Для этого УУ должен формировать импульсы отпираания полупроводниковых приборов, которые для импульсных преобразователей ИП сдвинуты на величину  $\tau$ , а для выпрямительно-инверторных преобразователей (ВИП) должны появляться со сдвигом на угол  $\alpha$  по отношению к моменту перехода кривой питающего напряжения через ноль. Обычно полупроводниковые исполнительные элементы используют в одноконтурных системах стабилизации тока, а системы стабилизации скорости в этом случае выполняют многоконтурными.

Рассмотрим функциональную схему такой системы стабилизации тока, в которой в качестве ИсУ используется полупроводниковый преобразователь. В этой схеме при нулевом рассогласовании, когда значение регулируемой величины (тока двигателя) стало равно заданному, то рассогласование  $\Delta u = 0$ ,  $\tau = 0$  ( $\alpha = 180^\circ$ ) и  $u_k = 0$ , что не обеспечивает нормальных условий работы э.п.с. Для того чтобы обеспечить нормальную работу, необходимо, чтобы при  $\Delta u = 0$   $u_k$ , а следовательно, и  $\tau$  или  $\alpha$  оставались на ранее достигнутом уровне. С этой целью в качестве ПУ2 необходимо применить элемент, выполняющий математическую операцию интегрирования.

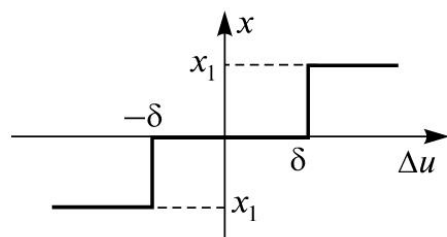


Рис. 2.9. Статическая характеристика элемента ПУ1

Для упрощения анализа в качестве ПУ1 применим переключательный элемент с зоной нечувствительности, статическая характеристика которого приведена на рис. 2.9. Эту характеристику можно описать следующим аналитическим выражением:

$$x_1 = \begin{cases} x_1, & \text{при } \Delta u > \delta; \\ 0, & \text{при } -\delta < \Delta u < \delta; \\ -x_1, & \text{при } \Delta u < -\delta. \end{cases} \quad (2.5)$$

Сигнал на выходе ПУ2 определяется выражением

$$x_2 = \int_{t_1}^{t_2} x_1 dt. \quad (2.6)$$

Поскольку  $x_1$  в соответствии с (2.5) принимает постоянное значение, не зависящее от времени, то (2.6) можно преобразовать к следующему виду:

$$x_2 = x_1 \int_{t_1}^{t_2} dt = x_1 (t_2 - t_1). \quad (2.7)$$

Таким образом, введение ПУ2, выполняющего операцию интегрирования, действительно обеспечивает нормальные условия работы системы стабилизации тока.

На рис. 2.10 приведены диаграммы сигналов одноконтурной системы стабилизации тока э.п.с., поясняющие работу промежуточ-

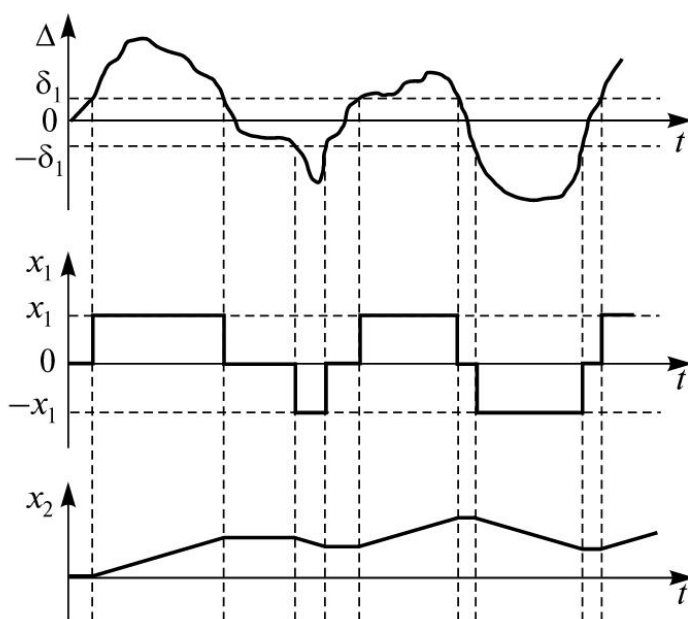


Рис. 2.10. Диаграммы сигналов в одноконтурной системе стабилизации тока э.п.с.

ных устройств ПУ1 и ПУ2. На первом графике показано изменение сигнала рассогласования  $\Delta(t)$ . На этом графике отмечена и зона нечувствительности, ширина которой составляет  $2\delta$ . На втором графике показан сигнал  $x_1(t)$  на выходе ПУ1, который принимает значения  $+x_1$  или  $-x_1$  только в те интервалы времени, когда  $\Delta(t) \geq \delta$ . В этих интервалах выполняется интегрирование сигнала  $x_1(t)$ , результат которого показан на третьем графике. Как видно из этого графика, выполнение операции интегрирования и приводит к тому, что при значениях  $x_1 = 0$  сигналы  $x_2$ , а следовательно,  $\tau(\alpha)$  и  $u_k$  остаются на ранее достигнутом уровне.

На электропоездах с релейно-контакторным управлением функции ПУ2 выполняет привод главного контроллера, угол поворота которого равен интегралу от угловой скорости вращения.

Системы стабилизации тока реализуют «абсолютно» мягкую характеристику  $I_3 = \text{const}$ , неприемлемую для тяги, так как при такой характеристике ухудшаются условия реализации сцепления колес с рельсами. Поэтому система стабилизации тока используется как внутренний контур в многоконтурных системах регулирования.

**Системы программного управления.** Программные САУ на э.п.с. можно разделить на две группы: задающие программу движения по перегону, т.е. зависимость  $v(s)$  или выполняющие ограничение на характеристики т.э.д. и локомотива.

Первые системы применялись до появления микропроцессорной техники и позволяли управлять локомотивом по заранее рассчитанным траекториям движения  $v(s)$ .

Они оказались несовершенными, так как условия движения  $u_{kc}$ , коэффициент сцепления  $\psi$  и сопротивление движению  $w$ , температура, влажность и т.п. значительно изменяются в процессе движения и заранее рассчитанные кривые  $v(s)$  значительно отличаются от реализуемых в процессе движения. Кроме того, применение микропроцессорных систем управления позволяет выполнять расчет траектории  $v(s)$  непосредственно в процессе движения и необходимость в программных САУ, задающих программу движения, отпала.

**Многоканальная САУ стабилизации тока (скорости).** Обычно САУ э.п.с. является многоканальной, так как содержит несколько объектов регулирования (т.э.д.), характеристики которых не совпадают и поэтому их не всегда можно заменить одним эквивалентным тяговым двигателем. Кроме того, на каждый т.э.д. можно воздействовать

разным каналом управления, изменяя  $u_k$ ,  $\beta$  или (и)  $u_B$ . В связи с этим возникает задача выравнивания регулируемых величин  $i$  или  $v$  тяговых электродвигателей т.э.д. При этом в системе стабилизации тока необходимо выделить сигнал, пропорциональный большему току двигателя  $i_6$  в режиме тяги или меньшего тока  $i_M$  в режиме электрического торможения соответственно.

В системе стабилизации скорости в режиме тяги выделяют сигнал, пропорциональный наименьшей скорости вращения т.э.д. ( $v_M$ ), так как увеличение скорости вращения вызывает ухудшение условий сцепления колес с рельсами и для улучшения этих условий для соответствующей колесной пары следует уменьшить ее вращающий момент, чтобы снизить скорость. В режиме электрического торможения выделяют сигнал, пропорциональный наибольшей скорости вращения  $v_6$ , так как уменьшение скорости связано с возможностью появления юза, что недопустимо, и снижение тормозного момента соответствующей колесной пары повышает скорость ее движения.

Для выравнивания  $i$  и  $v$  необходимо в составе САУ реализовать индивидуальные контуры воздействия на двигатель с индивидуальными регуляторами. В контуре индивидуального воздействия представляется возможным управлять т.э.д. только путем изменения  $\beta$  или  $u_B$ . Кроме того, изменение  $\beta$  можно выполнять только после выхода на автоматическую характеристику  $v(i)$  локомотива, когда напряжение  $u_k$  на зажимах т.э.д. становится равным номинальному  $u_k = u_{кн}$  и дальнейшее повышение  $u_k$  оказывается невозможным.

Рассмотрим для примера функциональную схему многоканальной САУ стабилизации тока тяговых электродвигателей последовательного возбуждения с выравниванием их токов (рис. 2.11). Эта схема содержит три группы регуляторов:

- регулятор тока РТ, управляющий изменением напряжения  $u_k$  на зажимах всех параллельно-включенных т.э.д.;
- регулятор возбуждения общий РВО, изменяющий коэффициент регулирования поля  $\beta$  одновременно всех электродвигателей после выхода на автоматическую характеристику;
- регуляторы индивидуального воздействия РИВ- $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  — количество тяговых двигателей), индивидуально изменяющие коэффициенты регулирования поля  $\beta_j$  каждого  $j$ -го т.э.д. так, чтобы обеспечить выравнивание токов всех двигателей;

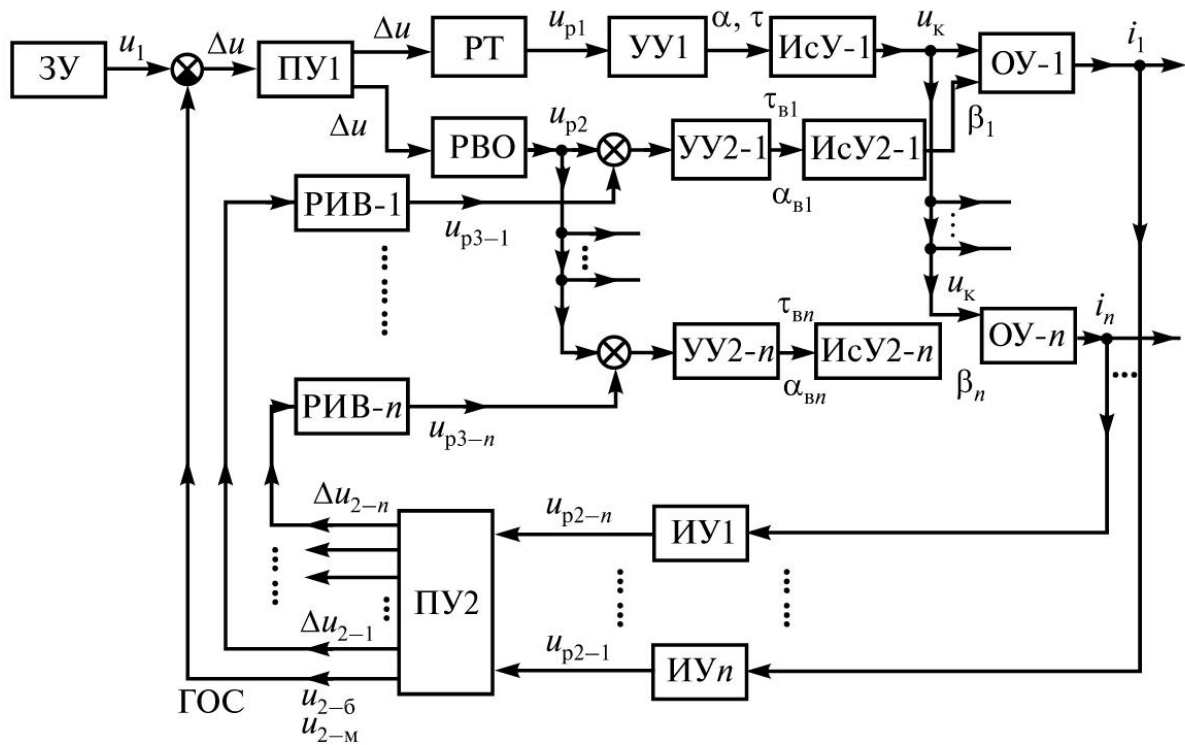


Рис. 2.11. Функциональная схема многоканальной САУ стабилизации тока (скорости)

— для учета разброса характеристик и параметров параллельно включенных т.э.д., токи каждого из них  $i_j(t)$  измеряются отдельными измерительными устройствами ИУ<sub>j</sub>, выходные сигналы  $u_{2j}$  которых поступают на вход промежуточного устройства ПУ2. Это устройство выполняет сравнение входных сигналов и выделяет сигналы  $u_{2-6}$  для системы стабилизации тока или  $u_{2-м}$  для системы стабилизации скорости (в режиме тяги). Кроме того, оно выделяет сигналы  $\Delta u_{2j}$ , характеризующие отклонение токов т.э.д. от наибольшего или наименьшего значений (сигналы  $u_{2-6}$  или  $u_{2-м}$ ).

Таким образом, для системы стабилизации тока

$$\Delta u_{2j} = u_{2-6} - u_{2j}, \quad (2.10)$$

а для системы стабилизации скорости

$$\Delta u_{2j} = u_{2j} - u_{2-м}. \quad (2.11)$$

Сигнал  $u_{2-6}$  ( $u_{2-м}$ ) является сигналом главной обратной связи ГОС и поступает на вход устройства сравнения УС, где сравниваются с сигналом  $u_1$  от задающего элемента. Рассогласование  $\Delta u = u_1 - u_{2-6}$

с выхода УС поступает на вход промежуточного устройства ПУ1. Это устройство определяет последовательность работы каналов управления. Вначале оно передает сигнал  $\Delta u$  на вход регулятора тока РТ. Этот регулятор увеличивает сигнал  $u_{p1}$  на своем выходе и соответственно изменяет сигналы  $\alpha$  или  $\tau$ , управляющие исполнительным устройством ИСУ1, для повышения напряжения  $u_k$  на зажимах т.э.д. от нуля до номинального значения  $u_{кн}$ , соответствующего выходу на автоматическую характеристику  $v(i)$  локомотива.

После достижения напряжением  $u_k$  номинального значения промежуточное устройство ПУ1 передает сигнал  $\Delta u$  на вход общего регулятора возбуждения РВО, обеспечивающего увеличение сигнала  $u_{p2}$  для уменьшения коэффициента регулирования поля  $\beta$  на всех т.э.д. и, следовательно, дальнейшее увеличение их токов (тяговых моментов). При этом РВО продолжает выполнять стабилизацию тока (скорости) тяговых электродвигателей.

Одновременно с этим из-за разности характеристик т.э.д. и колесно-моторных блоков величины  $i_j(v_j)$  будут различными. Для их выравнивания сигналы  $\Delta u_{2j}$ , характеризующие соответственно отклонения тока (скорости), подаются на все регуляторы индивидуального воздействия РИВ- $j$ . Сигналы  $u_{p3j}$  с выходов этих регуляторов суммируются с сигналом  $u_{p2}$  с выхода РВО и обеспечивают различие в величинах  $\beta_j$  разных т.э.д. для выполнения поставленной задачи — выравнивания тока или скорости.

Регуляторы РИВ- $j$  вступают в работу еще до выхода на автоматическую характеристику вместе с появлением токов  $i_j$ , стремясь сделать токи всех т.э.д. одинаковыми и равными наибольшему. Поэтому даже в начальный момент трогания величины  $\beta_j$  могут оказаться различными и меньшими единицы и при работе регулятора РТ, еще до выхода на автоматическую характеристику, на отдельных т.э.д. будет выполнено «ослабление» поля. Кроме того, регуляторы РИВ- $j$  должны действовать «медленнее», чем РВО, так как процессы отклонения  $i_j$  от наибольшей величины протекают медленнее, чем происходит изменение тока при изменении  $u_k$  или  $\beta$ .

Программные САУ, реализующие ограничения на характеристики локомотива (рис. 2.12) позволяют наиболее полно реализовать его мощность.

При этом соблюдаются имеющиеся ограничения на скоростную характеристику локомотива  $v(I)$ , к которым на э.п.с. с коллекторны-



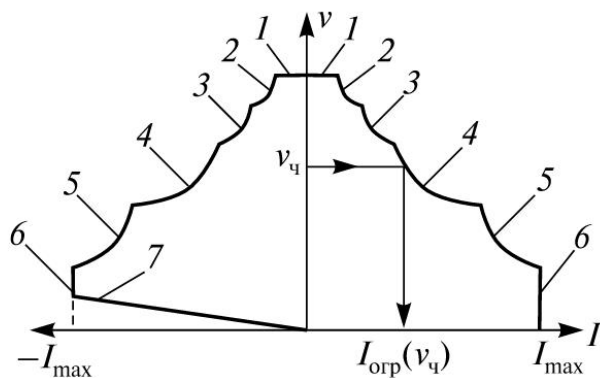


Рис. 2.12. Ограничения, накладываемые на характеристики т.э.д. локомотива

ми тяговыми двигателями относятся:

1 —  $v = v_K$  — ограничение по конструкционной скорости;

2 —  $v = v(e_r)$  — ограничение по реактивной э.д.с. тягового электродвигателя (данное ограничение учитывается для тяговых двигателей без компенсационной обмотки);

3 —  $v = v(e_K)$  — ограничение по коммутации;

4 —  $v = v(I)$  — естественная характеристика;

5 —  $v = v(F_{сц})$  — ограничение по сцеплению;

6 —  $v = v(I_{max})$  — ограничение по максимальному току;

7 —  $v = v(I_{в max})$  — ограничение по максимальному току возбуждения при рекуперативном торможении.

Таким образом, наибольшее значение тока, которое может реализовать т.э.д., зависит от скорости и должно учитываться в системах стабилизации тока. Так, например, при скорости движения  $v_ч$  можно реализовывать ток не больший, чем  $I_{огр}(v_ч)$ , что должна учитывать система автоматического регулирования. Поэтому функциональную схему (см. рис. 2.7) системы стабилизации тока дополняют устройством ограничения УО и промежуточным устройством ПУ (рис. 2.13).

В этой схеме для работы УО с помощью соответствующих измерительных устройств измеряются значения  $v$  и  $i_в$  тяговых электродвигателей. В зависимости от этих величин, а также от сигналов АЛС

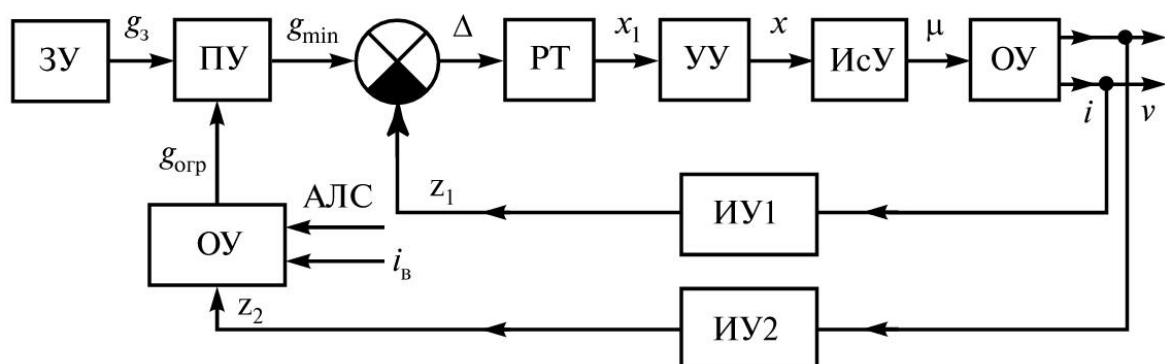


Рис. 2.13. Функциональная схема программной САУ током

элемент ОУ вырабатывает сигнал  $g_{огр}$ , пропорциональный наибольшему из возможных токов т.э.д. в соответствии с ограничениями на характеристики локомотива. Этот сигнал, а также сигнал  $g_3$  от задающего устройства ЗУ поступают на промежуточное устройство ПУ, которое пропускает на свой выход минимальный из входных сигналов  $g_{min}$ . Сигнал  $g_{min}$  является задающим для контура стабилизации тока, который обеспечивает равенство фактического значения тока  $z_1$  и минимального  $g_{min}$ .

Измерение  $v$  и  $i_B$  носит вспомогательный характер, и поэтому система остается одноконтурной. На отечественных электровозах ВЛ85, ВЛ65 и ЭП1 промежуточное устройство ПУ названо элементом ИЛИ- $min$ . Кроме того, из всех ограничений на этих электровозах реализуется только ограничение  $v = v(e_K)$  в виде  $i_B / i \geq 0,43$ .

На э.п.с. с асинхронными т.э.д. учитывают ограничение по мощности тягового двигателя и инвертора.

**Многоконтурные САУ э.п.с.** Многоконтурные САУ подразделяются на три вида:

- системы *подчиненного* управления, в которых один контур (наружный) является основным (контур скорости), а другой (внутренний) подчиненным (контур тока).
- *селективные* (избирательные) системы, в которых имеется два равноправных контура (например, контуры управления тока якоря  $i_a$  и тока возбуждения  $i_B$ ), работающих в определенной последовательности;
- *комбинированные* системы, в которых имеются подчиненные и селективные контуры.

Рассмотрим коротко первую и последнюю разновидности этих систем.

*Системы подчиненного регулирования.* Такие системы используются на э.п.с. с двигателями последовательного возбуждения для управления тока т.э.д. (внутренний контур) и скорости движения (внешний контур).

В таких САУ (рис. 2.14) предусмотрено два задающих устройства: задатчик скорости ЗУ1 и задатчик тока ЗУ2, представляющих собой рукоятки контроллера машиниста КМ. При этом ЗУ1 вводит в САУ сигнал  $g_1$ , пропорциональный заданной скорости  $v_3$ . УС1 определяет рассогласование по скорости  $\Delta_1$ , которое поступает на регулятор скорости РС, являющийся управляющим устройством

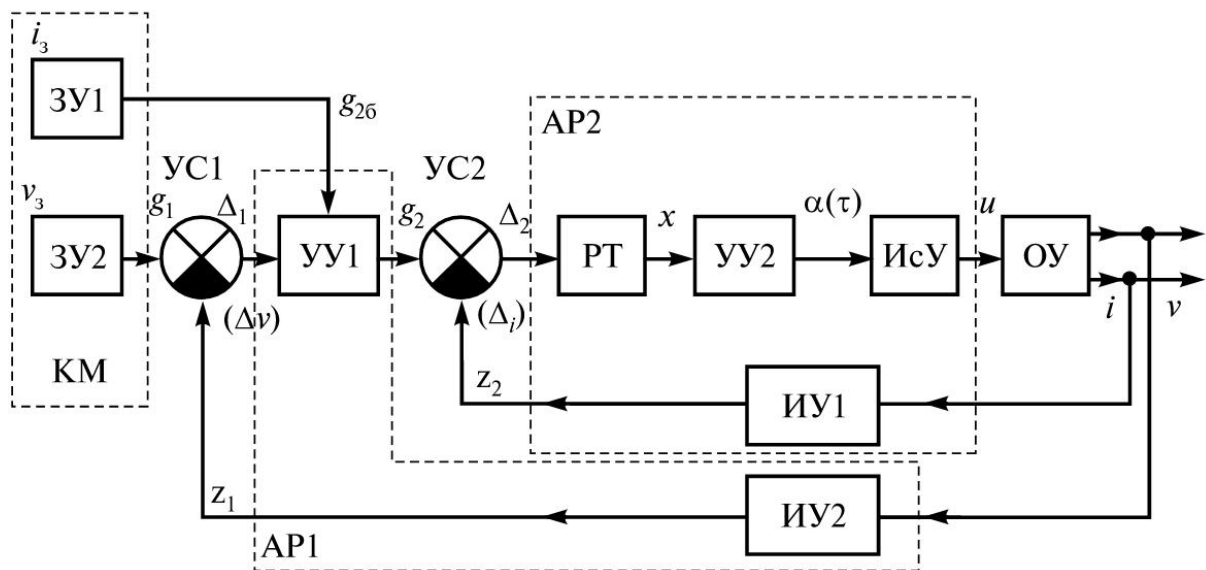


Рис. 2.14. Функциональная схема двухконтурной системы автоматической стабилизации скорости

УУ1. Кроме того, на этот элемент от ЗУ2 поступает сигнал  $g_{26}$ , пропорциональный наибольшему допустимому току. РС вырабатывает сигнал  $g_2$ , пропорциональный заданному значению тока так, чтобы выполнялось условие  $g_2 \leq g_{26}$ .

Внутренний контур, контур стабилизации тока, по сигналу  $g_2$  выполняет поддержание фактического значения тока  $i$  на заданном уровне с помощью автоматического регулятора АР2, в состав которого входит полный набор функциональных элементов, в то время когда в АР1 входят только УУ1 и ИУ1.

В начале трогания, когда  $v < v_3$  ( $g_1$ ), на выходе УУ1 через некоторое время появляется постоянное значение  $g_2$ , и внутренний контур будет работать как система стабилизации тока, «отрабатывая» это заданное значение. После того как скорость поезда возрастет и сравняется с заданной, будут возникать изменения  $v$ , вызываемые изменениями сопротивления движению. Это ведет к изменению сигнала  $g_2$ , и внутренний контур перейдет в режим следящей системы, обеспечивая изменение тока в зависимости от изменения  $g_2$ . При движении на подъем величина  $\Delta_1$  будет положительной и сигнал  $g_2$  также будет больше нуля. При движении под уклон сигнал  $\Delta_1$  будет уменьшаться и в какой-то момент времени станет отрицательным. Это вызовет снижение  $g_2$  до нуля, а затем, когда  $g_2$  станет отрицательным, САУ может по команде машиниста перейти в режим электрического торможения.

Многоконтурная комбинированная САУ с регулированием скорости, тока якоря и тока возбуждения. На рис. 2.15 изображена функциональная схема многоконтурной комбинированной САУ. На этой схеме все функциональные элементы, кроме задатчиков, объекта управления и устройств сравнения, показаны как автоматические регуляторы по аналогии с рис. 2.14. В этой схеме контроллер машиниста КМ оборудован тремя рукоятками задатчиков: скорости ЗС, тока якоря ЗТЯ и тока возбуждения ЗТВ.

Внешний контур регулирования скорости с регулятором АР1 так же, как и в предыдущем случае, является основным. Внутренние селективные контуры регулирования тока якоря и тока возбуждения с регуляторами АР2 и АР3 соответственно являются вспомогательными. При трогании и разгоне сигнал  $g_3$  задается пропорциональным максимальному току возбуждения, а сигнал  $g_2$  нарастает, увеличивая  $i_{\text{я}}$  и, следовательно, увеличивая силу тяги и скорость движения локомотива. После выхода на автоматическую характеристику, когда  $u_{\text{к}} = u_{\text{кн}}$ , в работу вступает контур  $i_{\text{в}}$ , уменьшая  $u_{\text{в}}$  или  $\beta$  так, чтобы обеспечить дальнейший рост силы тяги и скорости. Реальные схемы автоматики э.п.с. одновременно являются многоконтурными и многоканальными.

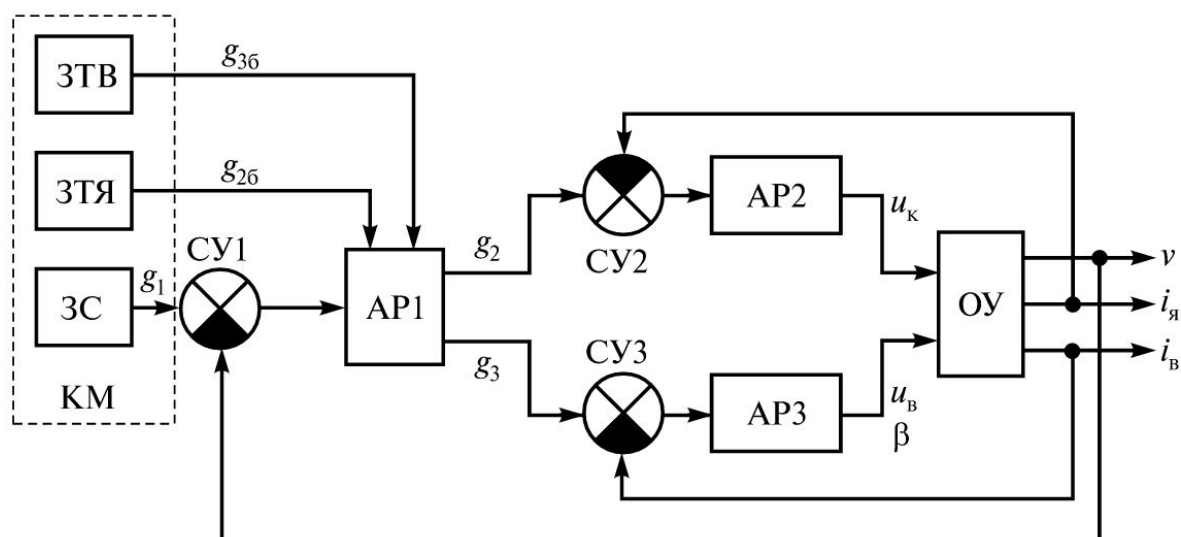


Рис. 2.15. Функциональная схема многоконтурной комбинированной САУ с регулированием скорости, тока якоря и тока возбуждения

## 2.5. Функциональные схемы САУ, применяемые на отечественном электроподвижном составе

**САУ скоростью э.п.с. с релейно-контакторной системой управления.** Регулирование скорости движения такого э.п.с. может быть осуществлено с использованием широко распространенных групповых или индивидуальных переключателей (рис. 2.16). Здесь УУ преобразует рассогласование  $\Delta = g - z_1 + z_2$  в номер позиции  $N$  группового переключателя. В цепь обратной связи этой функциональной схемы, помимо ИУ1, измеряющего скорость движения, введено еще одно измерительное устройство ИУ2, на выходе которого сигнал  $z_2$  пропорционален ускорению. Эта дополнительная обратная связь позволяет улучшить работу схемы при управлении таким инерционным объектом, как поезд.

**САУ э.п.с. с тиристорными преобразователями.** Наиболее перспективными системами автоматического управления э.п.с. являются многоконтурные САУ с использованием в качестве исполнительного устройства тиристорного преобразователя.

Функциональная схема системы автоматического управления электровоза ВЛ85, реализованная в виде блока автоматического управления типа БАУ-250, представляет собой систему автоматического управления режимами тяги и рекуперативного торможения и позволяет выполнять управление электровозами по системе многих единиц [24]. Она выполнена как многоконтурная система подчиненного регулирования, причем в режиме тяги она работает как двухконтурная с контурами регулирования скорости и тока, а в режиме рекуперации — как трехконтурная с контурами регулирования скорости  $v$ , силы тяги  $F_K$  (торможения  $B_K$ ) и тока возбуждения  $i_B$ .

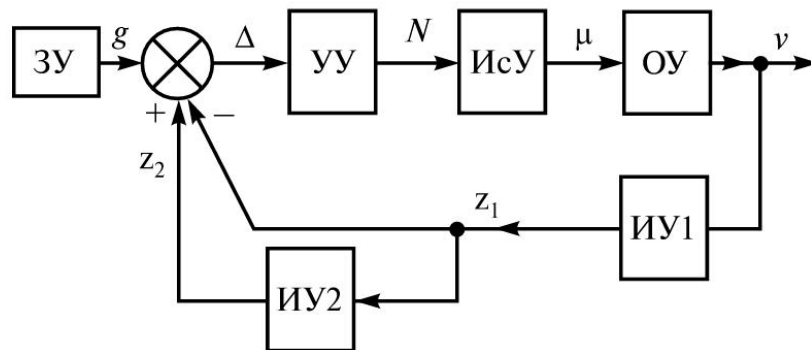


Рис. 2.16. Функциональная схема САУ скоростью э.п.с. с релейно-контакторной системой управления

В режиме тяги функциональная схема (рис. 2.17, а) включает в себя задатчики тока ЗТ и скорости ЗС контроллера машиниста КМ, регулятор скорости РС, промежуточное устройство ИЛИ1-min, устройство ограничения тока якоря УТЯ, задатчик интенсивности ЗИ1, регулятор тока якоря РТЯ, согласующее устройство СоУ1, исполнительное устройство ИсУ1 — четырехзонный выпрямительно-инверторный преобразователь, объекты управления ОУ1, представляющий собой цепь выпрямленного тока электровоза, ОУ2, выполняющий преобразование тока в силу тяги электровоза, и ОУ4, соответствующий механической части электровоза.

При пуске заданное значение тока якоря  $i_{я}$  через элементы ИЛИ1-min, УТЯ и ЗИ1 поступает на устройство сравнения УС1. Элемент ЗИ1 обеспечивает плавное увеличение заданного значения тока до значения, соответствующего положению рукоятки ЗТ. Рассогласование  $\Delta_2$  между сигналами, пропорциональными заданному и текущему значениям тока двигателя, отрабатывается регулятором РТЯ, работающим в режиме стабилизации.

Такая структура системы обеспечивает разгон электровоза с заданным ЗТ значением тока тяговых двигателей до заданного ЗС значения скорости движения. После этого САУ переходит в режим стабилизации скорости. В этом режиме задание тока определяется регулятором скорости РС, что обеспечено включением в схему элемента ИЛИ1-min, пропускающего на свой выход минимальный из входных сигналов. Поскольку при пуске фактическое значение скорости всегда меньше заданного, сигнал на выходе РС всегда больше, чем сигнал на выходе ЗТ. Поэтому в режиме пуска эта САУ работает как одноконтурная система стабилизации тока. После достижения заданной скорости движения сигнал на выходе РС становится меньше сигнала на выходе ЗТ и САУ начинает работать как двухконтурная.

Устройство СоУ1 обеспечивает согласование сигналов РТЯ и управляющего устройства УУ1, в качестве которого использованы соответствующие элементы блока управления выпрямительно-инверторным преобразователем типа БУВИП-133.

При увеличении угла регулирования  $\alpha_p$  и, следовательно, повышении напряжения  $u_k$  до максимального значения и при наличии положительного рассогласования по скорости  $\Delta_1 > 0$  согласующее устройство СоУ1 формирует сигнал на включение регулятора маг-



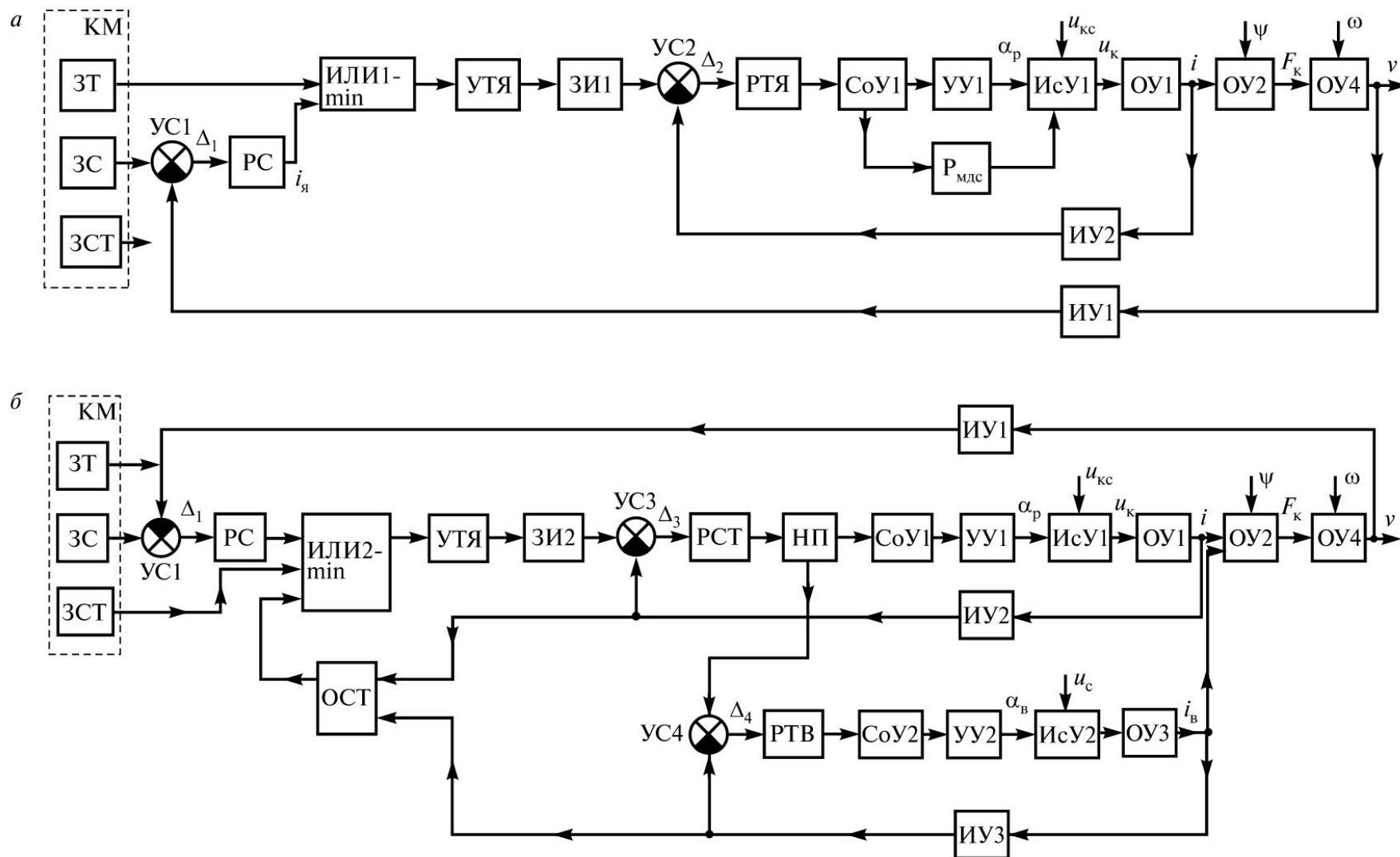


Рис. 2.17. Функциональная схема системы автоматического управления скоростью движения электровоза ВЛ85 в режиме тяги (а) и рекуперативного торможения (б)

нито-движущей силы  $P_{\text{мдс}}$ , который выполняет ступенчатое шунтирование обмотки возбуждения тягового двигателя с помощью включения соответствующих контакторов. Элемент УТЯ ограничивает ток якоря допустимым максимальным значением  $I_{\text{max}}$ .

В режиме рекуперативного торможения в БАУ-002 применена трехконтурная САУ, осуществляющая управление скоростью движения электровоза, силой торможения и током возбуждения (рис. 2.17, б). В ее состав входят задатчики силы торможения ЗСТ и скорости ЗС контроллера машиниста КМ, регулятор скорости РС, элемент ИЛИ2-min, ограничитель тока якоря УТЯ, задатчик интенсивности ЗИ2, регулятор силы торможения РСТ, устройство ограничения силы торможения по коммутации УСТ, исполнительные устройства ИсУ1, ИсУ2 и объекты управления ОУ1—ОУ4. В качестве ИсУ2 использована выпрямительная установка возбуждения типа ВУВ-001.

Контурсы регулирования тока возбуждения и силы торможения являются внутренними, а контур регулирования скорости — внешним. Нелинейный преобразователь НП выполняет функцию разделения каналов управления током якоря  $i_{\text{я}}$  и током возбуждения  $i_{\text{в}}$  следующим образом: до значения тока возбуждения тяговых двигателей, равного 880 А, управление тормозной силой осуществляется изменением тока возбуждения тяговых двигателей, а при токе возбуждения, равном 880 А, управление осуществляется путем изменения э.д.с. силового трансформатора при постоянстве тока возбуждения. Управление исполнительными устройствами ИсУ1 и ИсУ2 осуществляется через согласующие устройства СоУ1, СоУ2 и управляющие устройства УУ1 и УУ2. В качестве последних также использованы элементы БУВИП-133.

Элемент УСТ выполняет простейший алгоритм ограничения по коммутации на основе соотношения  $i_{\text{в}}/i_{\text{я}} = 0,43$ . Сигнал с выхода УСТ вместе с сигналами с выхода РС и ЗСТ поступают на вход ИЛИ2-min, который пропускает на свой выход минимальный из этих трех сигналов. Это обеспечивает реализацию наименьшего значения тормозной силы, необходимой для данных условий движения.

Таким образом, САУ электровоза ВЛ85 осуществляет ограничения по максимальному току якоря и по коммутации.

В целом блок автоматического управления электровозом ВЛ85 обеспечивает в тяговом режиме стабилизацию тока тяговых двига-

телей и скорости движения электровоза, а в рекуперативном режиме — остановочное торможение с заданным значением тормозной силы, плавное нарастание тормозной силы, изменение значения силы предварительного торможения в зависимости от скорости движения электровоза.

**САУ углом запаса инвертора.** Важным узлом системы управления электровозов ВЛ80Р и ВЛ85 является система автоматического управления углом запаса инвертора типа БРУЗ, который в виде отдельной кассеты входит в состав блока управления БУВИП. Эта система обеспечивает управление углом запаса инвертора по условию

$$\delta \geq \delta_3,$$

где  $\delta_3$  — заданное значение угла запаса.

Увеличение  $\delta_3$  ухудшает коэффициент мощности электровоза. Для повышения коэффициента мощности стремятся уменьшить  $\delta_3$ , однако при этом снижается устойчивость инвертора от опрокидыва-

ния. В связи с этим система БРУЗ должна быть достаточно совершенной, чтобы обеспечить одновременное выполнение этих противоречивых требований.

Известно, что в процессе рекуперативного торможения величина  $\delta_3$  зависит от угла коммутации  $\gamma$  (рис. 2.18):

$$\delta_3 = \pi - \alpha_B - \gamma,$$

где  $\alpha_B = \pi - \beta = \pi - \gamma - \delta$  — угол отпирания вентилей.

Угол  $\gamma$  связан следующими соотношениями с током рекуперации  $I_p$ , амплитудой напряжения на вторичной обмотке трансформатора  $U_m$ , индуктивным сопротивлением контура коммутации выпрямителя  $X_T$  и углом  $\alpha_B$ :

$$\gamma = \arccos \left( \cos \alpha_B - 2 \frac{X_T I_p}{U_m} \right) - \alpha_B.$$

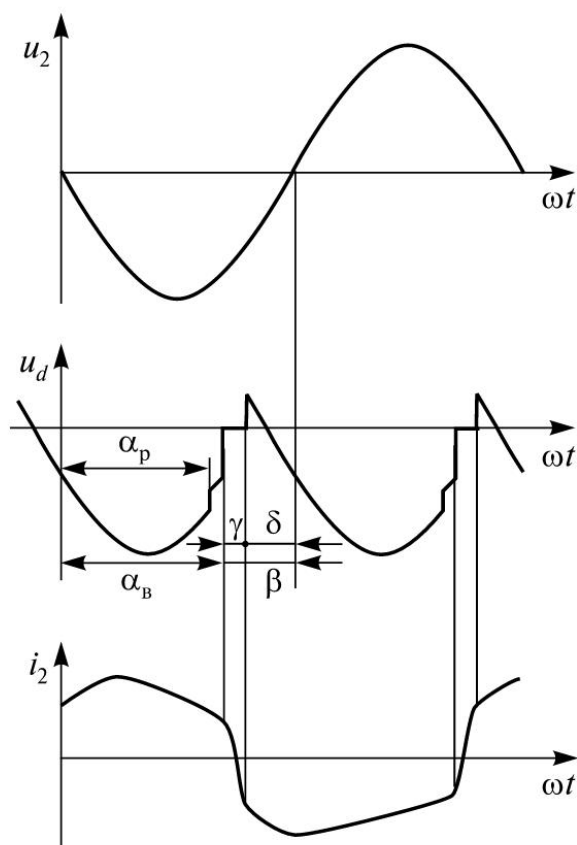


Рис. 2.18. Диаграмма напряжений и токов в режиме рекуперативного торможения

При изменении любого из аргументов  $X_T$ ,  $I_p$ ,  $U_m$  или  $\alpha_B$  величина  $\gamma$ , а следовательно, и  $\delta$  будут меняться. При этом  $\gamma$  зависит от внешних факторов и поэтому является возмущением, отклоняющим режим работы от заданного. В системах автоматики типа БРУЗ реализовано регулирование по разомкнутому циклу, при котором управляющий сигнал  $\alpha_B$  формируется по закону:

$$\alpha_{Bn} = \pi - \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i - \delta_3, \quad (2.12)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  — номер полупериода питающего напряжения.

Здесь суммирование заменяет операцию интегрирования, так как сигнал  $\gamma_i$  является дискретным и характеризует длительность процесса коммутации выпрямителя в каждый полупериод. При этом введение в закон управления операции суммирования эквивалентно управлению по среднему значению угла  $\gamma$ .

Автоматическое управление выпрямителем по закону (2.12) в режиме рекуперации выполняется в дополнение к управлению углом  $\alpha_p$ .

Для этого функциональную схему (см. рис. 2.17, б) необходимо дополнить управлением по углу  $\alpha_B$ . Следует иметь в виду, что объектом управления в данном случае является выпрямительно-инверторный преобразователь, т.е. исполнительное устройство ИСУ1 функциональной схемы, приведенной на рис. 2.17, б. Таким образом, на исполнительное устройство ИСУ (рис. 2.19, а) в режиме рекуперации поступают два управляющих сигнала:  $\alpha_p$ , изменяющий значения выпрямленного напряжения  $u_d$  и напряжения на зажи-

мах двигателя  $u_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_d dt$ , и  $\alpha_B$ , обеспечивающие управление по закону (2.12).

Измерительное устройство ИУ $_{\gamma}$  выделяет из кривой тока  $i_2$  вторичной обмотки трансформатора импульс напряжения  $u(\gamma)$ , длительность которого пропорциональна углу коммутации. Этот сигнал в регуляторе Р $_{\gamma}$  складывается в соответствии с законом (2.12) с сигналами  $u(\gamma)$ , полученными в предыдущие полупериоды, а затем в устройстве сравнения УС1 образуется сигнал  $u(\alpha_B)$ . Преобразование последнего в импульс отпирания тиристорov, форми-

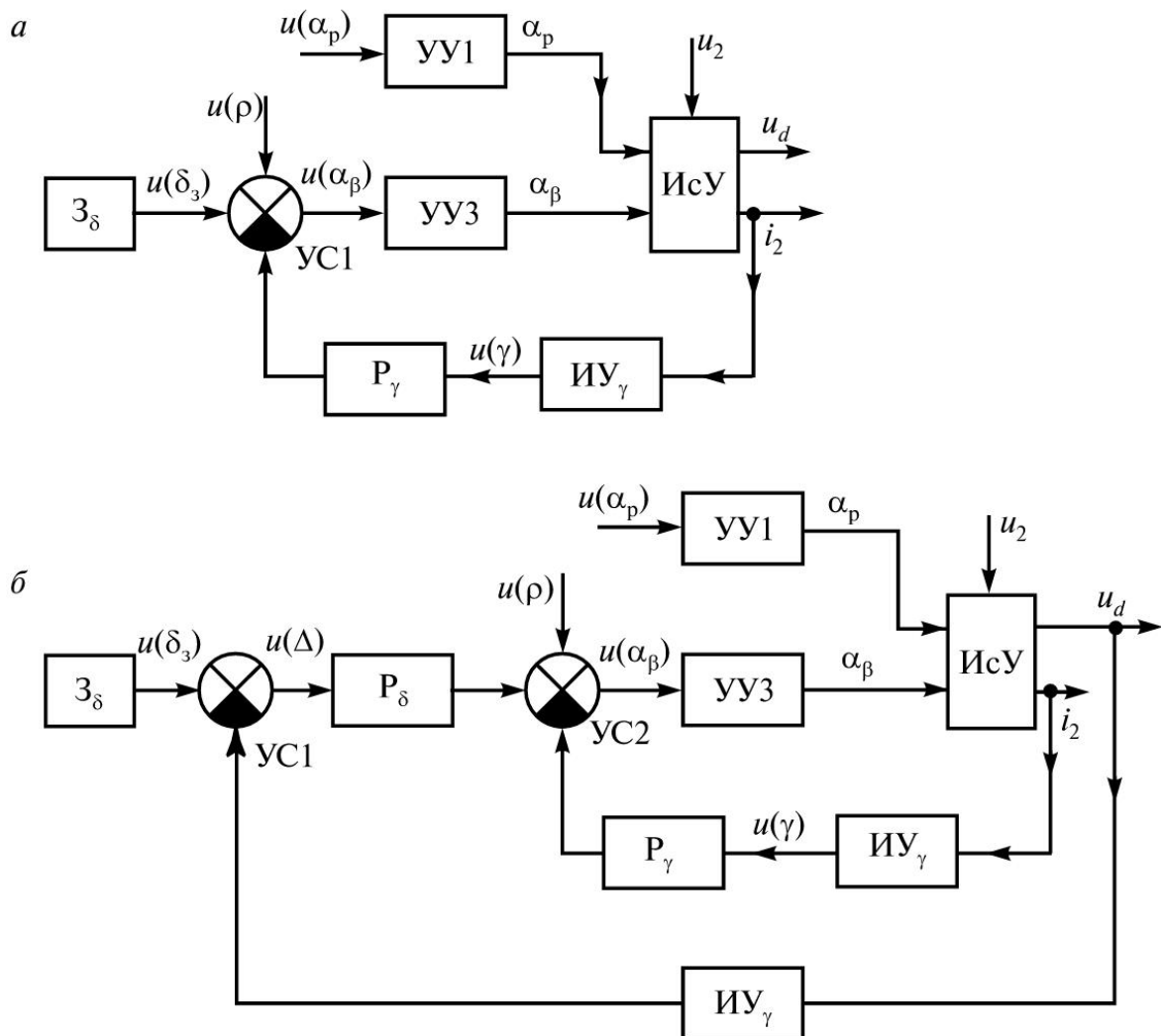


Рис. 2.19. Функциональная схема управления углом запаса инвертора по разомкнутому (а) и замкнутому (б) циклам

руемый в момент  $t_{\alpha\beta}$ , выполняется специальным управляющим устройством УУЗ, входящим в состав БУВИП.

Как видно из рис. 2.19, а, регулируемая величина — угол запаса непосредственно не измеряется и цепь обратной связи по  $\delta$  отсутствует, поэтому такая САУ является разомкнутой, реализующей регулирование по возмущению, т.е. по углу коммутации  $\gamma$ .

В последнее время появились замкнутые системы регулирования выпрямителя по углу запаса  $\delta$  или по так называемой вольт-секундной величине запаса

$$ut(\delta) = \int_{t(\alpha_B + \gamma)}^{0,5t_\pi} u_d dt,$$

а также по энергии за время коммутации и запаса. В функциональной схеме простейшей из таких систем — замкнутой САУ стабилизации угла запаса (рис. 2.19, б) применены два измерительных устройства, выделяющих сигналы, пропорциональные углам  $\gamma$  и  $\delta$ , а также регулятор угла запаса  $P_\delta$ , работающий по отклонению  $\Delta = \delta_3 - \delta$ .

**САУ реостатным торможением электровозов ВЛ80<sup>С</sup>.** Электровозы серии ВЛ80<sup>С</sup>, управляемые по системе многих единиц, оборудованы системой автоматического управления электрическим реостатным торможением с усовершенствованными блоками БУРТ-16. Устаревшие блоки БУРТ-125, применяемые на ранее выпущенных электровозах серий ВЛ80<sup>С</sup> и ВЛ80<sup>Т</sup> заменяются в настоящее время на блоки БУРТ-16 и разработанные в МИИТе модернизированные блоки БУРТ-001М.

САУ обеспечивает автоматическое управление режимами:

- предварительного реостатного торможения с плавным нарастанием тормозной силы до 100 кН;
- остановочного реостатного торможения при плавном нарастании до заданной величины и стабилизации тормозной силы;
- реостатного торможения со стабилизацией заданной скорости движения на спусках и ограничением тормозной силы;
- замещающего пневматического торможения при отказе электрического торможения.

Машинист управляет процессом торможения посредством тормозной рукоятки ТР и задатчика тормозной силы ЗТС пульта управления машиниста ПУМ (рис. 2.20). Рукоятка ТР имеет пять фиксированных положений: 0 — нулевое; П — подготовка схемы силовых цепей к торможению; ПТ — предварительное торможение; Т — торможение с шестнадцатью ступенями тормозной силы  $B_3$  от 100 до 490 кН (сигнал  $g_1$ , пропорциональный  $B_3$ , задаваемый задатчиком тормозной силы ЗТС), а также ФС — фиксация скорости тормозного режима на спусках.

Тяговые электродвигатели включены по схеме независимого возбуждения. Якорная обмотка каждого электродвигателя нагружена на индивидуальный тормозной резистор. Восемь обмоток возбуждения соединены последовательно и питаются от управляемого выпрямителя ВУВ.



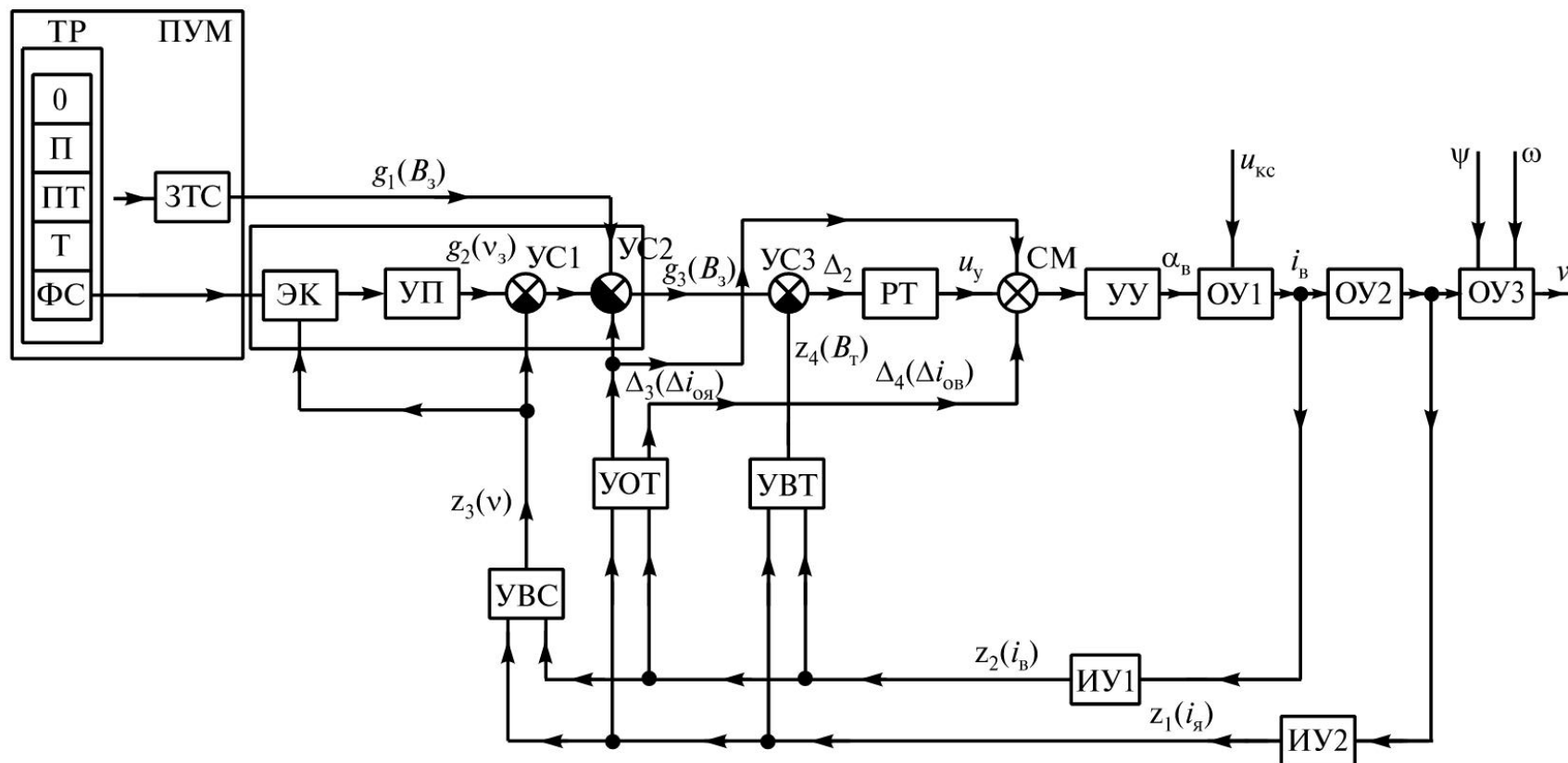


Рис. 2.20. Функциональная схема САУ системы реостатного торможения электровоза ВЛ80С

*Контур возбуждения* т.э.д. с выходным сигналом  $i_{\text{в}}$  — током возбуждения можно рассматривать как объект управления ОУ1, на который воздействует изменение напряжения контактной сети  $u_{\text{кс}}$ , контуры якорных обмоток и тормозных резисторов с выходными сигналами  $i_{\text{я}}$  — токами якорей — как ОУ2. Электровоз и поезд с выходным сигналом  $v$  — скоростью движения, на который воздействуют изменения условий сцепления  $\psi$  и сопротивления движению  $w$ , образуют ОУ3.

В системе автоматического управления использованы сигналы обратных связей:  $z_1$  — по току возбуждения  $i_{\text{в}}$  — от измерительного устройства ИУ1,  $z_2$  — по току якорных обмоток  $i_{\text{я}}$  — от ИУ2, а также  $z_3$  — по скорости движения  $v$  — от устройства вычисления скорости УВС.

Система автоматического управления содержит два регулятора: скорости РС и тормозной силы РТ. Они образуют два соподчиненных контура регулирования. К внешнему контуру регулирования относятся: регулятор скорости РС, устройство вычисления скорости УВС и устройство ограничения токов УОТ якорей и возбуждения тяговых электродвигателей. УВС производит вычисление сигнала  $z_3$  скорости движения  $v$  по сигналам  $z_1$  и  $z_2$  измерительных устройств ИУ1, ИУ2, измеряющих токи возбуждения  $i_{\text{в}}$  и якорей  $i_{\text{я}}$  тяговых электродвигателей. Сигнал  $z_3$  подается одновременно в устройство памяти УП и устройство сравнения УС1 регулятора скорости РС.

В режиме остановочного торможения выходной сигнал  $g_2$  устройства памяти УП равен сигналу  $z_3$  устройства УВС, сигнал рассогласования с выхода УС1  $\Delta_1 = g_2 - z_3 = 0$ , поэтому регулятор скорости РС не воздействует на регулятор тормозной силы РТ.

В режиме торможения с фиксацией скорости движения электронный коммутатор ЭК отключает устройство памяти УП от устройства вычисления скорости УВС. Выходной сигнал  $g_2$  УП в этом режиме является сигналом заданной скорости торможения  $v_3$ , соответствующей фактической скорости движения поезда  $v$  на момент постановки тормозной рукоятки ТР в положение ФС. Устройство сравнения УС1 регулятора скорости РС формирует сигнал рассогласования по скорости  $\Delta_1 = g_2 - z_3 > 0$ . Сигнал  $g_1$  задатчика тормозной силы ЗТС поступает в устройство сравнения УС2 регулятора скорости РС, который производит уменьшение сигнала  $g_1$

заданной тормозной силы  $B_3$  на величину сигнала рассогласования  $\Delta_1$ , если скорость движения снижается относительно заданной. На УС2 подается также сигнал  $\Delta_3$  превышения ограничения токов якорей  $\Delta i_{оя}$ , если токи якорей т.э.д. превышают величину, устанавливаемую в зависимости от скорости движения устройством ограничения токов УОТ. Последний реализует функции программного ограничителя тормозной силы и токов т.э.д. Таким образом, на выходе регулятора скорости формируется сигнал  $g_3 = g_1 - \Delta_1 - \Delta_3$  заданной тормозной силы  $B_3$ , программно ограничиваемый по току якорей т.э.д. в функции скорости движения  $I_{оя}(v)$ .

Если скорость движения в режиме ФС становится ниже заданной в результате движения поезда по элементу пути с малым уклоном, сигнал рассогласования существенно возрастает  $\Delta_1 \gg 0$ . Регулятор скорости РС снижает сигнал  $g_3$  заданной тормозной силы до минимального значения, переводя систему в режим подтормаживания с тормозной силой 100 кН. Такой же режим подтормаживания реализуется при постановке тормозной рукоятки КМ в положение ПТ.

Регулятор скорости дополнительно обеспечивает защиту колесно-моторных блоков от режима синхронного юза. В случае возникновения юза, сопровождающегося резким снижением уровня сигнала  $z_3$  скорости движения  $v$ , устройство сравнения УС1 формирует сигнал рассогласования  $\Delta_1 \gg 0$  независимо от режима торможения (остановочного или фиксации скорости). Сигнал  $\Delta_1$  производит снижение сигнала  $g_3$  заданной тормозной силы  $B_3$ , приводящее к ликвидации юза.

Основной контур регулирования тормозной силы образуют: устройство вычисления тормозной силы УВТ, устройство сравнения УС3 и регулятор тормозной силы РТ. УВТ производит вычисление сигнала  $z_4$  фактической тормозной силы  $B_T$  путем перемножения сигнала  $z_2$  с выхода измерительного устройства ИУ2, измеряющего токи якорей  $i_я$  и сигнала  $z_1$  от ИУ1, функционально преобразованного в сигнал, пропорциональный магнитному потоку т.э.д.

Устройство сравнения УС3 сравнивает сигнал  $g_3$  заданной тормозной силы  $B_3$  с сигналом  $z_4$  фактической тормозной  $B_T$ , создавая сигнал рассогласования по тормозной силе  $\Delta_2 = g_3 - z_4$ . Последний передается в регулятор тормозной силы РТ, формирующий сигнал управления  $u_y$ . Этот сигнал передается в управляющее устройство

УУ, которое выполняет функции фазорегулятора, преобразуя сигнал  $u_y$ , изменяющийся по уровню в импульс фазового управления выпрямителем возбуждения ВУВ, сдвинутый на фазовый угол  $\alpha_v$  по отношению к напряжению тяговой обмотки трансформатора.

На входе управляющего устройства УУ сигнал  $u_y$  суммируется в сумматоре СМ с сигналами  $\Delta_3$  и  $\Delta_4$  превышения ограничений токов обмоток якорей  $\Delta i_{оя}$  и возбуждения  $\Delta i_{ов}$  тяговых электродвигателей, программно задаваемых УОТ. Сумматор СМ, устройство ограничения токов УОТ и управляющее устройство УУ образуют внутренний подчиненный контур регулирования токов возбуждения и якорей т.э.д. При наличии сигналов  $\Delta_3$  или  $\Delta_4$  ограничений токов, фазовые углы  $\alpha_v$  импульсов управления на выходе управляющего устройства УУ возрастают, уменьшая ток возбуждения и токи якорей т.э.д.

В диапазоне изменения скорости 90—110 км/ч величина токов якорей ограничивается потенциальными условиями на коллекторах тяговых электродвигателей. При этом УОТ задает программу ограничения тока якорей в функции скорости  $I_{оя}(v)$ . Сопротивление тормозных резисторов в этом режиме постоянно, поэтому ограничения токов обмоток возбуждения не требуется.

В диапазоне изменения скорости 60—90 км/ч действует ограничение по мощности тормозных резисторов. Для его реализации УОТ задает ограничение тока  $I_{оя}$  на уровне 830 А. При скорости ниже 60 км/ч действует ограничение по току возбуждения  $I_{ов} = 1100$  А. Эта величина тока допускается по условиям нагревания обмоток возбуждения тягового электродвигателя в течение 20 мин, что достаточно для режима остановочного торможения поезда.

В системе автоматического управления предусмотрен ряд элементов, реализующих дополнительные функции. В частности, при снижении скорости до 35 км/час производится переключение ступени тормозных резисторов для уменьшения сопротивления от 1 до 0,54 Ом при обеспечении режима стабилизации тормозной силы. В случае отказа реостатного тормоза, т.е. при  $i_{я} = 0$ , производится автоматическое включение замещающего пневматического торможения.

**САУ рекуперативным торможением электровозов постоянного тока.** Электровозы постоянного тока серии ВЛ11<sup>М</sup>, управляемые по системе многих единиц, и электровозы серии ВЛ10<sup>У</sup> оборудованы системой автоматического управления рекуперативным торможением. Ранее установленные на электровозах блоки автомати-

ческого управления САУРТ-034 заменены на разработанные в МИИТе блоки САУРТ-034БЭ, оснащенные усовершенствованной противоюзовой защитой.

САУ обеспечивает автоматическое управление режимами:

- плавного входа в рекуперацию и предварительного торможения с тормозной силой 100 кН;
- рекуперативного торможения с плавным нарастанием до заданной величины и стабилизацией тормозной силы;
- рекуперативного торможения со стабилизацией заданной скорости движения на спусках и ограничением тормозной силы;
- замещающего пневматического торможения при отказе рекуперативного торможения.

Машинист управляет процессом торможения так же, как и на электровозе ВЛ80<sup>С</sup> (см. рис. 2.20), посредством тормозной рукоятки ТР, задатчика тормозной силы ЗТС и задатчика напряжения ЗН пульта управления машиниста ПУМ (рис. 2.21). Тормозная рукоятка имеет следующие фиксированные положения: 0 — нулевое; П — подготовка схемы силовых цепей к торможению; ПТ — предварительное торможение с плавным входом в режим рекуперации; Т — торможение с шестнадцатью ступенями тормозной силы или скорости торможения.

Ступени тормозной силы задаются задатчиком тормозной силы ЗТС в диапазоне от 100 до 490 кН.

Кроме того, на пульте управления машиниста имеется переключатель режимов со следующими обозначениями: « $I$  — ток» — режим стабилизации тормозной силы и « $v$  — скорость» — режим стабилизации скорости торможения. В тормозных положениях переключатель режимов формирует сигнал  $g_1$  заданной тормозной силы  $B_3$  или скорости движения  $v_3$ .

Тяговые электродвигатели включены по схеме независимого возбуждения. Якорные обмотки т.э.д. каждой секции электровоза включены в последовательно-параллельные или последовательные группы. Обмотки возбуждения тяговых электродвигателей каждой секции независимо от группировки якорных обмоток включены в две последовательно-параллельные группы и питаются мотор-генератором возбуждения. Контур возбуждения т.э.д. с выходным сигналом  $i_B$  — током возбуждения можно рассматривать как объект управления ОУ1, а контуры якорных обмоток тяговых электродви-



Рис 2.21. Функциональная схема САУ системы рекуперативного торможения электровозов ВЛ10<sup>у</sup> и ВЛ11<sup>м</sup>



гателей с выходным сигналом  $i_{\text{я}}$  — током якорей, замыкающиеся на потребителя рекуперированной электроэнергии через контактную сеть, как ОУ2. Электровоз и поезд с выходным сигналом  $v$  — скоростью движения образуют ОУ3.

В системе автоматического управления использованы сигналы обратных связей:  $z_1$  — по току возбуждения  $i_{\text{в}}$  от измерительного устройства ИУ1,  $z_2$  — по току якорных обмоток  $i_{\text{я}}$  от ИУ2,  $z_3$  — по суммарной э.д.с. тяговых электродвигателей  $u_{\text{к}}$  от ИУ3,  $z_4$  — по скорости движения  $v$  от устройства вычисления скорости УВС.

Система автоматического управления содержит пять однотипных регуляторов: скорости РС, напряжения РН, тока рекуперации РТР, тока возбуждения РТВ, отношения токов якорей и возбуждения тяговых электродвигателей РОТ. На входы регуляторов одновременно с задающими сигналами и сигналами обратных связей, непрерывными по уровню, подается периодический сигнал пилообразной формы частотой 30 Гц от релаксационного генератора. Поэтому каждый регулятор выполняет функции устройства сравнения или сумматора сигналов и преобразователя, сигналов, непрерывных по уровню, в периодическую последовательность импульсных сигналов с относительной длительностью  $\lambda$ .

Четыре регулятора РН, РТР, РОТ и РТВ подключены посредством диодно-логического модуля ИЛИ-min к управляющему устройству УУ. Диодно-логический модуль обеспечивает выбор контура регулирования с минимальным регулирующим воздействием.

Пятый регулятор РС образует внешний контур регулирования, функционирующий в режиме стабилизации скорости движения. Управляющее устройство УУ производит импульсное переключение силового транзисторного ключа, регулирующего ток возбуждения  $i_{\text{н}}$  генератора возбуждения ОУ1. Относительная длительность  $\lambda$  состояния насыщения транзисторного ключа УУ формируется регуляторами через модуль ИЛИ-min.

Регулятор напряжения РН обеспечивает плавный вход в режим рекуперации при постановке тормозной рукоятки в положение ПТ. На входы регулятора подаются сигналы:  $g_4$  — задатчика напряжения ЗН,  $z_3$  — суммарной э.д.с. вращения  $u_{\text{к}}$  тяговых электродвигателей от ИУ3,  $z_1$  — тока возбуждения  $i_{\text{в}}$  от ИУ1. Задатчик напряжения ЗН осуществляет плавное нарастание сигнала  $g_4$  до максимального уровня в течение 3 секунд. Регулятор РН обеспечивает плавное увеличе-

ние тока возбуждения до тех пор, пока суммарная э.д.с. вращения  $u_k$  не достигнет уровня напряжения контактной сети  $U_{kc}$ . При небалансе напряжений  $U_{kc} - u_k = 80 - 100$  В срабатывает реле рекуперации (на рис. 2.21 не показано) и производит включение линейных контакторов, замыкающих цепь тока рекуперации.

В том случае, если произошла задержка срабатывания реле рекуперации или линейных контакторов, сигнал  $z_3$  посредством регуляторов РН и РТВ производит ограничение тока возбуждения тяговых электродвигателей и удержание положительного небаланса напряжений  $u_k - U_{kc} \cong 50-80$  В, пока не сработает реле рекуперации и произойдет включение линейных контакторов.

Основной контур регулирования тока рекуперации образуют: устройство ограничения тока УОТ, устройство защиты от юза УЗЮ и регулятор тока рекуперации РТР. На входы РТР подаются сигналы:  $g_3$  — от регулятора скорости,  $g_2$  — заданного тока рекуперации  $I_{яз}$  от функционального преобразователя ФП,  $z_2$  — обратной связи по току рекуперации  $i_{я}$  от ИУ2 через устройство ограничения тока УОТ.

Сигнал  $g_2$  заданного тока рекуперации  $I_{яз}$  формируется функциональным преобразователем ФП по сигналу  $g_1$  задатчика тормозной силы ЗТС и сигналу обратной связи  $z_1$  тока возбуждения  $i_b$  тяговых электродвигателей от ИУ1. При достижении током возбуждения величины, близкой к максимальной, сигнал  $g_2$  заданного тормозного тока  $I_{яз}$  ограничивается функциональным преобразователем ФП, предотвращая возникновение юза колесных пар электровоза.

Устройство ограничения тока рекуперации УОТ при отсутствии юза передает на вход регулятора РТР сигнал  $z_2$  обратной связи по току  $i_{я}$  якореi т.э.д. от измерительного устройства ИУ2. При возникновении юза одной из колесных пар элемент УЗЮ по сигналу регулятора тока возбуждения РТВ или блока против-юзо-боксовочной защиты ПБЗ воздействует на УОТ, увеличивая уровень сигнала  $z_2$ , тем самым уменьшая величину тока возбуждения  $i_b$  тяговых электродвигателей и тока рекуперации  $i_{я}$ . Дополнительно УЗЮ формирует при продолжительном юзе (более 5 с) сигнал на подачу песка.

Регулятор тока возбуждения РТВ ограничивает интенсивность нарастания тока возбуждения, формирует сигнал, воздействующий на УЗЮ при возникновении юза, а также ограничивает максималь-

ную величину токов возбуждения тяговых электродвигателей. На входы РТВ подаются сигналы  $z_1$  обратной связи по току возбуждения  $i_b$  непосредственно от ИУ1 и через инерционное звено ИЗ. Кроме того, на вход РТВ подается через интегро-дифференцирующее звено ИДЗ сигнал  $z_3$  обратной связи по суммарной э.д.с. вращения  $u_k$  тяговых электродвигателей от ИУ3, обеспечивая смягчение переходных процессов в цепях якорей т.э.д. при скачках напряжения в контактной сети.

В установившемся режиме рекуперации сигнал  $z_1$  обратной связи по току возбуждения и сигнал на выходе инерционного звена ИЗ равны, т.е. небаланс этих сигналов равен нулю. При возникновении юза, когда сигнал  $z_1$  интенсивно возрастает, а сигнал на выходе ИЗ изменяется с запаздыванием, создается небаланс входных сигналов РТР, ограничивающий интенсивность возрастания тока возбуждения т.э.д. Выходной сигнал РТВ при этом переключает УЗЮ в режим ограничения тока рекуперации.

В том случае, когда отключается потребитель рекуперированной энергии, возрастает суммарная э.д.с. вращения тяговых электродвигателей  $u_k$ . Сигнал обратной связи  $z_3$  от ИУ3, подаваемый в регуляторы РТВ и РН, обеспечивает снижение тока возбуждения  $i_b$  т.э.д. и ограничение их суммарной э.д.с. вращения.

Регулятор отношения токов РОТ производит ограничение тока возбуждения  $i_b$  и тока рекуперации  $i_{я}$ , если отношение токов якорей и возбуждения превышает допустимую по условиям коммутации величину (2,8 — при параллельном соединении; 5,3 — при последовательно-параллельном соединении т.э.д.).

В режиме стабилизации скорости движения (режим « $v$  — скорость») внешний контур регулирования образует устройство вычисления скорости УВС и регулятор скорости РС. На вход регулятора РС подаются сигналы:  $g_1$  — от задатчика ЗТС, переключенного в режим стабилизации скорости, и  $z_4$  — обратной связи по скорости  $v$  от УВС.

УВС производит вычисление сигнала  $z_4$ , пропорционального скорости движения  $v$  по сигналам  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  чувствительных элементов ИУ1, ИУ2 и ИУ3, измеряющих токи обмоток возбуждения  $i_b$ , якорей  $i_{я}$ , а также суммарную э.д.с. вращения тяговых электродвигателей  $u_k$ . Выходной сигнал  $g_3$  регулятора РС является сигналом заданного тока рекуперации  $I_{я3}$ , подаваемым на вход РТР.

Таким образом, система автоматического управления функционирует как двухконтурная с главным контуром регулирования скорости движения и соподчиненными параллельными контурами регулирования токов возбуждения и токов якорей тяговых электродвигателей.

**САУ рекуперативно-реостатным торможением электропоездов.** Системами автоматического управления режимами пуска и электрического рекуперативно-реостатного торможения оборудованы электропоезда постоянного тока ЭР2Т, ЭТ2, ЭД4, ЭД4Э. В отличие от этого, на электропоездах однофазно-постоянного тока ЭР9Т, ЭД9Т используется только электрическое реостатное торможение.

САУ электропоездов постоянного тока обеспечивают автоматическое управление режимами:

- пуска с поддержанием заданного пускового тока при последовательном возбуждении тяговых электродвигателей;
- рекуперативного торможения со стабилизацией заданного тока рекуперации при независимом возбуждении тяговых электродвигателей;
- реостатного замещающего торможения со стабилизацией тормозного тока при независимом возбуждении тяговых электродвигателей;
- реостатного дотормаживания с поддержанием заданного тормозного тока при последовательном или независимом возбуждении тяговых электродвигателей;
- замещающего электропневматического торможения при отказе электрического торможения.

САУ электропоездов переменного тока выполняют такие же функции за исключением режима рекуперативного торможения.

В режимах пуска САУ обеспечивает поддержание среднего значения пускового тока  $i_{\text{я}}$  (рис. 2.22) тяговых электродвигателей — объекта управления ОУ1 путем ступенчатого регулирования напряжения  $u_{\text{к}}$ , подводимого к т.э.д. и ступенчатого «ослабления возбуждения»  $\beta$  с помощью контакторных пуско-регулирующих аппаратов исполнительного устройства ИсУ1. Моторные вагоны, сцепленные с головными и прицепными вагонами, образуют объект управления ОУ2 — электропоезд с выходной переменной  $v$  — скоростью движения. Интенсивность пуска — значение пускового тока  $g_1$  задается от контроллера машиниста КМ с помощью задатчика тока ЗТ. Контур регулирования тока  $i_{\text{я}}$  т.э.д. образуют устройство сравнения УС1, уп-

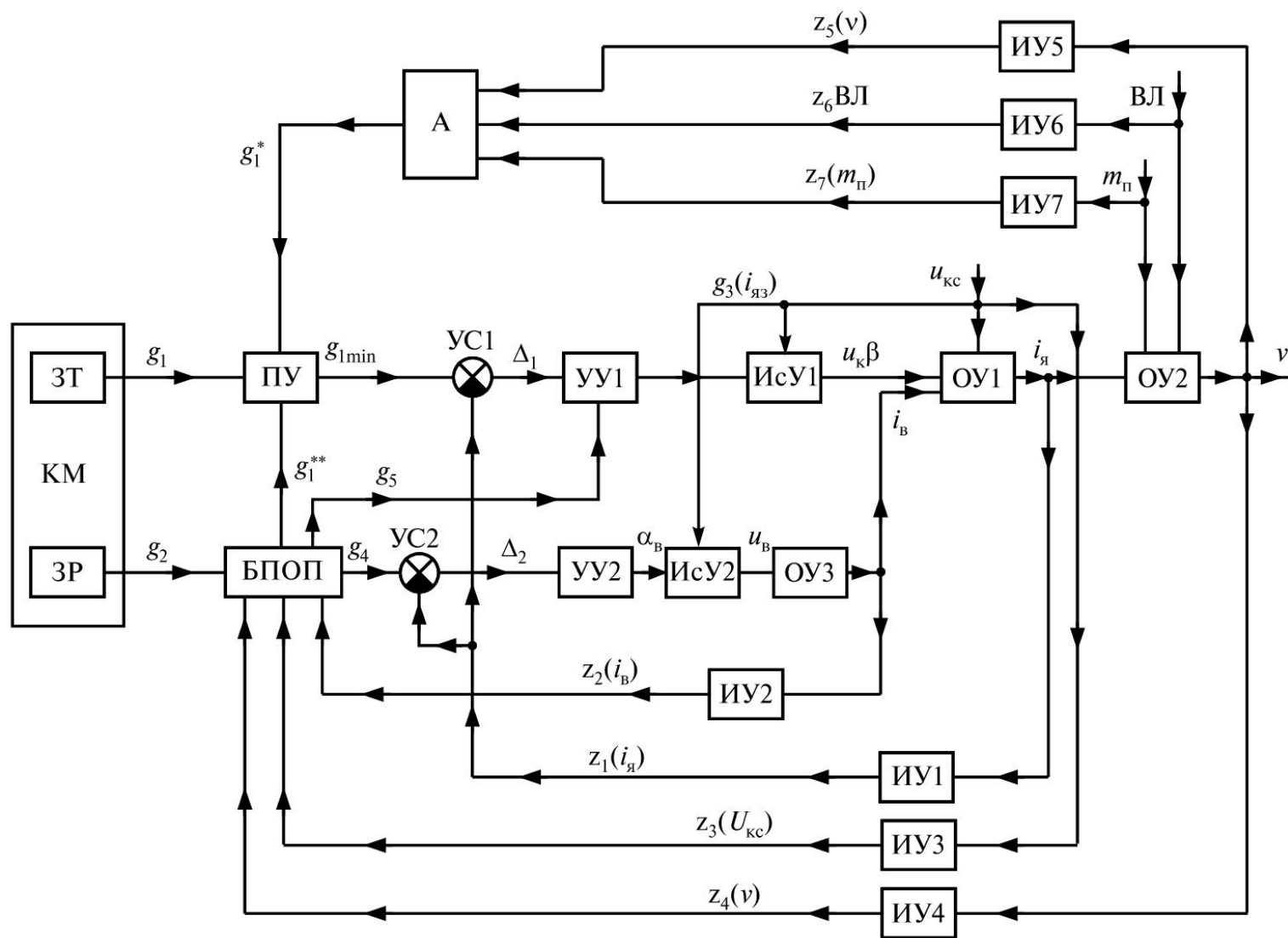


Рис. 2.22. Функциональная схема САУ системы рекуперативно-реостатного торможения электропоездов постоянного тока



равляющее устройство УУ1, исполнительное устройство ИсУ1, объект управления ОУ1 и измерительное устройство ИУ1, измеряющее ток тяговых электродвигателей  $i_{я}$ .

УУ1 формирует команды на переключение ступеней управления ИсУ1 при снижении сигнала обратной связи  $z_1$ , подаваемого на вход УС1 ниже уровня задающего сигнала  $g_{1min}$ , т.е. при  $\Delta_1 = g_{1min} - z_1 > 0$ .

Изменение загрузки вагонов, скорости движения электропоезда, климатических условий влияют на условия сцепления колесных пар с рельсами и повышают вероятность возникновения режимов боксования и юза. Для предупреждения возникновения аварийных режимов, обусловленных ухудшением условий сцепления, САУ электропоездов целесообразно оборудовать устройствами адаптации по условиям сцепления. Адаптер А на основе заложенных в память зависимостей формирует выходной сигнал  $q_1^*$  допустимого по условиям сцепления тока тяговых электродвигателей по сигналам обратных связей  $z_5, z_6, z_7$  от измерительных устройств ИУ5, ИУ6 и ИУ7, измеряющих скорость движения  $v$ , влажность окружающей среды (Вл), массу вагонов  $m_{п}$ . В настоящее время на эксплуатируемых электропоездах применяется только адаптация по нагрузке вагонов.

Промежуточное устройство ПУ, выполняющее операцию ИЛИ- $\min$ , пропускает на выход минимальный сигнал  $g_{1min}$  из трех сигналов:  $g_1$  — заданного значения тока тягового режима,  $q_1^{**}$  — заданного значения тока режима торможения и  $q_1^*$  — адаптера. Сигнал  $g_{1min}$  является задающим для контура управления тока т.э.д.

В режимах электрического рекуперативного и замещающего реостатного торможения величина тормозного тока  $g_2$  задается рукояткой задатчика режима ЗР контроллера машиниста. Контур управления тока якорей тяговых электродвигателей образуют следующие устройства: УС2, УУ2, ИсУ2, ОУ1 и ИУ1. При этом УС2 преобразует выходные сигналы  $g_4$  от блока программных ограничений и переключений БПОП,  $z_1$  от ИУ1 в сигнал рассогласования  $\Delta_2 = g_4 - z_1$ . УУ2 по этому сигналу формирует импульсы управления тиристорным мостом возбуждения тяговых электродвигателей (исполнительное устройство ИсУ2), сдвинутые на фазовый угол  $\alpha_v$  по отношению к напряжению питания тиристорного моста. Напряжение независимого возбуждения  $u_v$  с выхода



ИУ2 поступает на обмотки возбуждения ОУ3, создавая ток возбуждения  $i_B$ .

Кроме того, БПОП выполняет следующие дополнительные функции:

- контроль и ограничение тока возбуждения  $i_B$  по сигналу  $z_2$  измерительного устройства ИУ2;

- контроль уровня напряжения контактной сети  $u_{kc}$  по сигналу  $z_3$  измерительного устройства ИУ3;

- формирование сигнала  $g_4$ , задающего величину тормозного тока в режимах электрического рекуперативно-реостатного торможения, функционально зависящую от сигнала  $z_4$  измерительного устройства ИУ4, который измеряет скорость движения  $v$ ;

- формирование сигнала  $q_1^{**}$ , задающего величину тормозного тока в режиме электрического реостатного дотормаживания при последовательном возбуждении т.э.д.;

- формирование разрешающего сигнала  $g_5$  на переключение позиций пуско-тормозных аппаратов в режимах реостатного торможения электропоездов ЭР9Т, ЭД9Т и реостатного дотормаживания электропоездов ЭТ2 и ЭД4;

- формирование команд на переключение САУ в режимы реостатного замещающего торможения и реостатного дотормаживания;

- формирование команды на включение электропневматического замещающего торможения при отказе электрического торможения, т.е. при  $i_{я} = 0$ .

Таким образом, в режиме тяги и электрического рекуперативно-реостатного торможения САУ функционирует с независимыми контурами регулирования пускового и тормозного токов тяговых электродвигателей.

---

## Глава 3. МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 3.1. Понятие о модели САУ. Классификация САУ по виду моделей

**Модель** (от латинского *modulus* — мера, образец, норма) в технике определяется как физическое устройство или математическое описание каких-либо объектов, систем, процессов, явлений, отражающее их существенные свойства. В соответствии с этим используют физические и математические модели.

**Физические модели** представляют собой устройства, схемы, установки, системы машин, и т.д., подобные в определенном смысле изучаемым объектам [6]. Преобразование объекта в физическую модель реализуется путем масштабирования его параметров и размеров на основе теории подобия и размерности. Для адекватности процессов функционирования модели реальным процессам изменение различных размеров и параметров в одной модели может осуществляться с различным масштабом. Такие модели, в отличие от морфологических, уже позволяют исследовать функционирование изучаемых явлений и систем. Однако создание физической модели представляет собой довольно сложную проблему. Кроме того, для изучения влияния изменения параметров отдельных элементов модели необходимо их изготовить, что значительно удорожает и усложняет выполнение исследований.

**Математические модели** являются математическим описанием процессов функционирования изучаемых явлений или объектов на основе известных физических законов [6]. К таким законам относятся законы Ньютона, принцип Даламбера и уравнения Лагранжа в механике; законы Ома, Кирхгофа, Фарадея, Максвелла в электромеханике и т.п. Математические модели позволяют легко выполнять формализацию задачи и широко применять методы

математического моделирования для исследования функционирования (анализа) изучаемых явлений или объектов и даже для решения задач синтеза.

Выбор соответствующей модели, отражающей интересующие исследователя свойства физической системы, зачастую является достаточно сложной задачей. Использование упрощенного математического описания может привести к ошибочным выводам. Вместе с тем нерациональное усложнение модели может не позволить получить обозримые результаты. Поэтому выбор модели требует от ее создателя глубокого знания физических процессов, протекающих в изучаемой системе, изучение опыта использования различных моделей при исследовании подобных систем. Математическая модель должна соответствовать решаемой задаче. Так, математическое описание движения поезда по участку может не учитывать процессов в тяговом приводе. Вместе с тем при создании электронных преобразователей для тягового привода необходимо выполнять достаточно точное описание электромагнитных процессов.

Основой анализа системы управления служит рассмотрение зависимости между определенными входами и выходами ее устройств (блоков, узлов и т.д.). Введем основные понятия на примере обобщенного объекта управления (рис. 3.1), содержащего исполнительное и измерительное устройства, а также объект управления.

При моделировании системы управления в целом или ее отдельных функциональных узлов рассматриваемые понятия не изменяются. Система автоматического управления содержит объект управления и совокупность устройств,

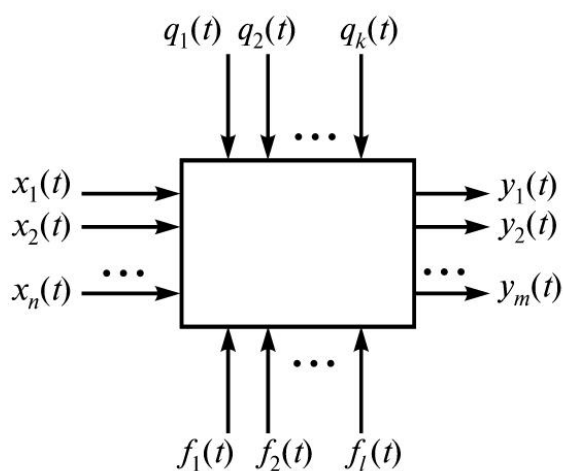


Рис. 3.1. Объект управления

обеспечивающих заданное соответствие между входом (входами) и выходом (выходами) системы. Тогда связь между входом (входами) и выходом (выходами) системы может быть охарактеризована подобно тому, как это можно сделать для обобщенного объекта управления.

Управляющие воздействия в модели объекта представлены действительными функциями време-

ни  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , выходные сигналы (иначе управляемые величины) — функциями  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ ; контролируемые внешние воздействия — функциями  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t)$ ; неконтролируемые внешние воздействия — функциями  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_l(t)$ . Для сокращения записи совокупность функций представляется в векторной форме:

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m);$$

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_k);$$

$$\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_l).$$

Здесь для сокращения опущена запись независимой переменной  $t$ . Математическая модель обобщенного объекта представляет собой математическое описание, связывающее управляемые величины  $\mathbf{Y}$  со всеми внешними воздействиями  $\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}$ . Если модель представлена системой уравнений и известно исходное состояние системы (т.е. известны начальные условия), то результатом решения этой системы уравнений при заданных внешних воздействиях  $\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}$  будут управляемые величины  $\mathbf{Y}$ .

Если  $n = m = 1$ , т.е. имеется одно управляющее воздействие и на выходе — одна управляемая величина, то объект является *односвязным*. В противном случае, когда имеется несколько взаимно связанных координат векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , объект называют *многосвязным*.

Рассмотрим модели односвязных систем. Предположим, что на систему воздействует входной сигнал  $\mathbf{X}(t)$ ,  $\mathbf{Q} = 0$ ,  $\mathbf{F} = 0$  и до подачи входного сигнала система находилась в нулевых начальных условиях. Соотношение между входом и выходом обозначим как  $y(t) = L[x(t)]$ , где  $L$  — оператор, определяющий связь между функциями  $y(t)$  и  $x(t)$ . Оператор может быть функцией  $y, x, t$ , может включать операции интегрирования, дифференцирования, может задаваться в вероятностной форме.

Систему называют *детерминированной*, если каждому входному сигналу  $x(t)$  соответствует единственный выходной сигнал  $y(t)$ . В *недетерминированных* (иначе *стохастических*) системах данному вход-

ному сигналу могут соответствовать несколько возможных выходных сигналов, каждый из которых имеет определенную вероятность появления. Входной сигнал в детерминированной системе может быть как детерминированной, так и случайной функцией времени. В последнем случае выходной сигнал — также случайная функция времени.

Систему называют *реализуемой*, если текущее значение ее выходного сигнала  $y(t)$  не зависит от будущих значений входного сигнала  $x(t)$  и где  $y(t)$  — действительная функция времени при всех действительных функциях  $x(t)$ . Эти условия соответствуют наличию причинно-следственных связей в системе:  $y(t_0)$  полностью определяется свойствами системы и значениями  $x(t)$  при  $t \leq t_0$ .

Систему называют *линейной*, если ее модель описывается линейным оператором  $L$ . Оператор  $L$  является линейным, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} L(x_1 + x_2) &= L(x_1) + L(x_2); \\ L(Cx) &= CL(x), \end{aligned}$$

где  $x, x_1, x_2$  — функции;

$C$  — постоянная величина.

Указанные условия определяют принцип суперпозиции: реакция линейной системы на сумму входных сигналов равна сумме реакций системы на каждый из этих входных сигналов. В противном случае систему называют *нелинейной*.

Систему называют *стационарной (автономной)* при выполнении следующего условия: если входной сигнал  $x(t)$  вызывает реакцию  $y(t)$ , то  $x(t - \tau)$  соответствует реакции  $y(t - \tau)$ , т.е. если  $y(t) = L[x(t)]$ , то  $y(t - \tau) = L[x(t - \tau)]$ .

Приведенное условие означает, что в стационарной системе реакция системы не зависит от момента приложения входного сигнала.

Приведенные определения поясним на ряде примеров.

### **Пример 3.1**

Дифференциатор характеризуется соотношением

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Приведенный оператор — линейный, так как

$$\frac{d[x_1(t) + x_2(t)]}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt};$$

$$\frac{d[cx(t)]}{dt} = c \frac{dx(t)}{dt}.$$

Приведенный оператор стационарный, так как

$$y(t - \tau) = \frac{dx(t - \tau)}{dt},$$

отсюда дифференциатор — линейная стационарная система.

### **Пример 3.2**

Квадратор характеризуется соотношением

$$y(t) = x^2(t).$$

Приведенный оператор — нелинейный, так как

$$[x_1(t) + x_2(t)]^2 \neq x_1^2(t) + x_2^2(t).$$

Приведенный оператор стационарен, так как

$$y(t - \tau) = x^2(t - \tau),$$

отсюда квадратор — нелинейная стационарная система.

### **Пример 3.3**

Система характеризуется соотношением

$$y(t) = t \frac{dx(t)}{dt}.$$

Приведенный оператор — линейный, так как

$$t \frac{d[x_1(t) + x_2(t)]}{dt} = t \frac{dx_1(t)}{dt} + t \frac{dx_2(t)}{dt};$$

$$t \frac{d[cx(t)]}{dt} = ct \frac{dx(t)}{dt}.$$



Приведенный оператор нестационарный, так как

$$t \frac{dx(t-\tau)}{dt} \neq (t-\tau) \frac{dx(t-\tau)}{dt},$$

отсюда данная система линейна и нестационарна.

В общем случае модель односвязной непрерывной САУ представляется нелинейным уравнением вида

$$F(x, x', x'', \dots, y, y', y'', \dots, q, q', q'', \dots, f, f', f'', \dots, t) = 0, \quad (3.1)$$

куда входят: функция  $x$ , описывающая процессы на входе системы и ее производные  $x', x'', \dots$ ; функция  $y$ , описывающая процессы на выходе системы и ее производные  $y', y'', \dots$ ; функции  $q$  и  $f$ , описывающие, соответственно, контролируемые и неконтролируемые внешние воздействия (возмущения) и их производные  $q', q'', \dots, f', f'', \dots$ , аргумент  $t$  — время.

На основе уравнения (3.1) выполняют решение задач анализа и синтеза систем автоматического управления.

*Задачей анализа САУ* является определение функции  $y(t)$  при заданных  $x(t)$ ,  $q(t)$ ,  $f(t)$ , т.е. нахождение математического описания процесса на выходе системы при заданных входных сигналах. Полученная функция  $y(t)$  анализируется с точки зрения соответствия требованиям устойчивости и выбранным критериям качества управления.

*Задача синтеза САУ* значительно сложнее. При ее решении требуется при известной модели объекта управления, заданных входном сигнале  $x$ , внешних воздействиях  $q, f$  определить модель управляющего устройства (иначе, закон управления) таким образом, чтобы зависимость  $y(t)$  удовлетворяла требованиям устойчивости и критериям качества управления. Формулировка задач анализа и синтеза не изменяется и для других моделей САУ.

Систему управления можно характеризовать по виду циркулирующих в ней сигналов. Сигнал называют *непрерывным*, если он описывается однозначной функцией непрерывно изменяющегося аргумента  $t$ , определенной для всех значений  $t$  на заданном интервале за исключением, возможно, счетного множества точек. Определение непрерывного сигнала не совпадает с определением непрерывной функции. Непрерывный сигнал может быть описан и функцией, имеющей точки разрыва (рис. 3.2).

В частности, к непрерывным сигналам относится так называемый «единичный скачок» (рис. 3.3) — функция, задаваемая следующим соотношением:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

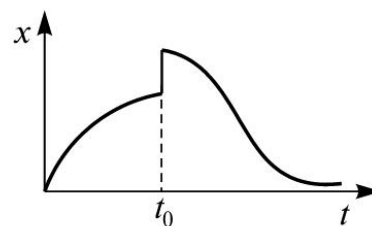


Рис. 3.2. Непрерывный сигнал

Эта функция обычно моделирует воздействие, подаваемое на вход системы.

*Дискретным* называют сигнал, определенный только для последовательности дискретных значений независимой переменной  $t$ . Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называют *временной дискретизацией*.

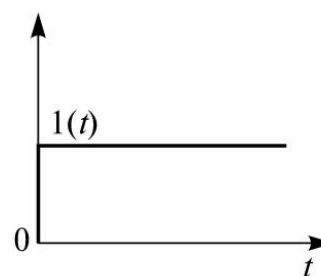


Рис. 3.3. График функции единичного скачка

Временная дискретизация реализуется в системах, использующих импульсную модуляцию — преобразование непрерывного модулируемого сигнала в последовательность импульсов, параметры которых (амплитуда, длительность, частота) несут информацию о модулированном сигнале. Различают системы с амплитудно-импульсной (АИМ), широтно-импульсной (ШИМ) и частотно-импульсной (ЧИМ) модуляцией.

В системах с импульсными видами модуляции АИМ, ШИМ, ЧИМ сигнал на выходе модулятора так же, как и непрерывный сигнал, может принимать бесконечное множество значений. Сигналы, принимающие бесконечное множество значений, называют аналоговыми.

Развитие вычислительной техники привело к широкому использованию цифровых систем управления. В цифровых системах аналоговый сигнал преобразуется в цифровую форму. Техническое устройство, осуществляющее эту функцию, называют аналого-цифровым преобразователем (АЦП). На вход АЦП поступает аналоговый сигнал, имеющий бесконечное множество значений, на выходе АЦП будет сигнал, определяющий двоичный код фиксированной разрядности  $n$ . Следовательно, число различных состояний на выходе  $n$ -разрядного АЦП конечно и равно  $2^n$ .

Преобразование аналогового сигнала, имеющего бесконечное множество значений, в сигнал с конечным множеством значений называют квантованием по уровню (или просто квантованием). Операция квантования связана с округлением непрерывной величины. Модель идеального квантования (рис. 3.4, а) представляют в виде нелинейного элемента (НЭ), для которого зависимость выходной величины  $x_{\text{ВЫХ}}$  от входной  $x_{\text{ВХ}}$  имеет вид, приведенный на рис. 3.4. Погрешность квантования  $\Delta = x_{\text{ВЫХ}} - x_{\text{ВХ}}$ .

Если нелинейный элемент округляет аналоговый сигнал  $x_{\text{ВХ}}$  в соответствии с характеристиками, приведенными на рис. 3.4, б и в, то максимальная погрешность квантования равна  $q$  — шагу квантования по уровню. В том случае, когда округление реализуется нелинейным элементом, имеющим характеристику, симметричную относительно оси ординат (рис. 3.4, г), максимальное значение погрешности определяется величиной  $\frac{q}{2}$ .

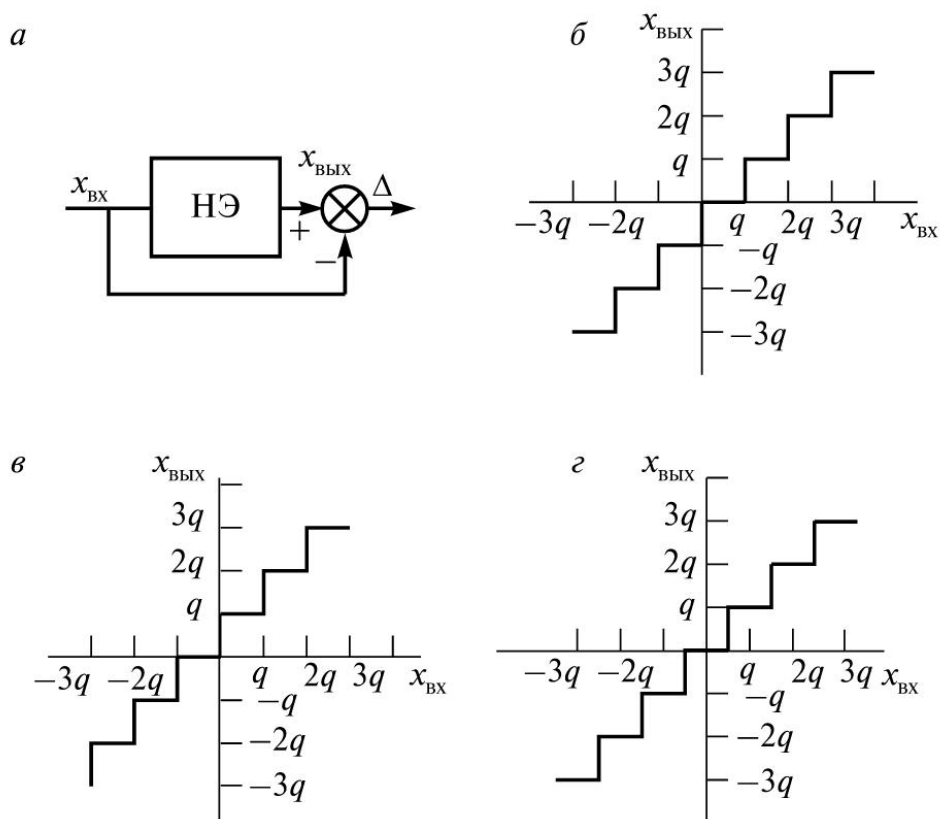


Рис. 3.4. Модель квантующего устройства (а) и характеристики идеального квантующего устройства (б, в и г)

Эту характеристику можно принять за базовую, так как она уменьшает вдвое максимальную методическую погрешность и может быть получена из первых двух путем подачи на вход НЭ постоянного смещения, равного соответственно  $\pm \frac{q}{2}$ .

Погрешность квантования по уровню для базовой характеристики НЭ функционально связана с входной величиной в соответствии с рис. 3.4, с следующим образом:

$$\Delta = kq - x_{\text{вх}} \text{ при } kq - 0,5q \leq x_{\text{вх}} \leq kq + 0,5q,$$

где  $k$  — номер интервала квантования.

Рассмотренные характеристики НЭ имеют постоянный шаг квантования по уровню, хотя в общем случае это и необязательно.

В цифровых системах управления непрерывный сигнал подвергается временной дискретизации и квантованию по уровню. В соответствии с рис. 3.4 операция квантования нелинейна. В то же время процесс временной дискретизации может быть описан линейным оператором. Поэтому в данной книге термин «квантование по времени», иногда применяемый в технической литературе, не используется, а вместо него применяется термин «временная дискретизация».

Входной сигнал объекта управления, как правило, является аналоговым. Поэтому дискретизированный по времени и квантованный по уровню сигнал на выходе цифрового устройства управления должен быть преобразован в аналоговый. Это преобразование называют восстановлением. Операция восстановления реализуется цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП).

Таким образом, в зависимости от вида сигнала системы автоматического управления могут быть *непрерывными, импульсными и цифровыми*.

В состав системы управления входят, как правило, инерционные элементы. Математические модели, описывающие процессы в этих элементах, базируются на законах физики. Поэтому модель САУ содержит в общем случае систему интегро-дифференциальных и алгебраических уравнений. Так, при моделировании электрических цепей, динамики локомотива и т.п. используют обыкновенные дифференциальные уравнения, а при моделировании процессов в системах с распределенными параметрами (например, распространение волны воздуха в тормозной системе поезда; переходные процессы в

длинных линиях) используются дифференциальные уравнения в частных производных. Моделирование процессов в цифровых управляющих устройствах систем может быть осуществлено на базе так называемых разностных уравнений. В данной книге будут рассматриваться модели на основе обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений.

### 3.2. Модели «вход—выход» односвязных непрерывных линейных стационарных САУ (модели классической теории управления) и способы их исследования

Наиболее разработана теория линейных стационарных непрерывных САУ [26]. В дальнейшем изложении термин «непрерывные» будем опускать, термин «стационарный» использовать только там, где это принципиально необходимо. Математическую модель «вход—выход» линейной стационарной односвязной системы можно получить из уравнения (3.1) на основе принципа суперпозиции в виде линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{l=0}^m B_l \frac{d^l x}{dt^l} + \sum_{r=0}^s C_r \frac{d^r q}{dt^r} + \sum_{k=0}^h F_k \frac{d^k f}{dt^k}, \quad (3.2)$$

$n \geq m \geq s, h$ , считая, что при  $i = 0, l = 0, r = 0$  и  $k = 0$  производная нулевого порядка представляет собой соответствующую координату.

В значительном числе практически важных случаев анализ линейных САУ проводят вначале при отсутствии возмущений  $q$  и  $f$ , а затем дополнительно рассматривают влияние возмущений. Кроме того, так как функции  $q, f$  и их производные входят в правую часть уравнения, то

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{l=0}^m B_l \frac{d^l \left( x + \frac{C_l}{B_l} q + \frac{F_l}{B_l} f \right)}{dt^l} \quad (3.3)$$

ИЛИ

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{l=0}^m B_l \frac{d^l u}{dt^l}, \quad (3.4)$$

где

$$u = x + \frac{C_l}{B_l} q + \frac{F_l}{B_l} f.$$

Без нарушения общности можно рассматривать модель

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{l=0}^m B_l \frac{d^l u}{dt^l}, \quad n \geq m, \quad (3.5)$$

где  $u$  — входной сигнал, называемый также «управлением».

Если принять, что начальные условия  $y(0)$ ,  $y'(0)$ , ...,  $y^{(n-1)}(0)$  равны 0, что соответствует отсутствию запасов энергии при  $t = 0$ , то, используя преобразование Лапласа для левой и правой части уравнения (3.5), получаем:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i y(p) = \sum_{l=0}^m b_l p^l u(p), \quad (3.6)$$

где  $y(p) = L[y(t)]$  — изображение по Лапласу функции  $y(t)$ ;

$u(p) = L[u(t)]$  — изображение по Лапласу функции  $u(t)$ .

Переход от оригиналов  $y(t)$  и  $u(t)$  к изображениям  $y(p)$  и  $u(p)$  осуществляется в соответствии с выражениями:

$$y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt; \quad (3.7)$$

$$u(p) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt, \quad (3.8)$$

где  $p = a + jb$  — комплексное число — оператор Лапласа.

В Приложении 1 кратко описано преобразование Лапласа, сформулированы его свойства и приведена таблица соответствия оригиналов и изображений.



Вынося  $y(p)$  и  $u(p)$  за знак суммирования в левой и правой части (3.6), получаем:

$$y(p) \sum_{i=0}^n a_i p^i = u(p) \sum_{l=0}^m b_l p^l, \quad (3.9)$$

откуда

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{\sum_{l=0}^m b_l p^l}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (3.10)$$

где  $M(p)$  и  $N(p)$  — полиномы соответственно  $m$ -й ( $m \leq n$ ) и  $n$ -й степени.

Функцию  $W(p)$  — отношение изображения  $y(p)$  выходной функции к изображению  $u(p)$  входной при нулевых начальных условиях называют *передаточной функцией*.

Рассмотрим решение задачи определения реакции линейной системы, заданной математической моделью (3.5), в начале функционирования которой не была запасена энергия, на входной сигнал  $u(t)$ . Реакция линейной системы на заданный входной сигнал  $u(t)$  определяется функцией  $y(t)$ , которая является решением дифференциального уравнения (3.5) при нулевых начальных условиях. Рассмотрим решение уравнения операторным методом (метод, использующий преобразования Лапласа).

Передаточная функция  $W(p)$  системы (3.5) определяется выражением (3.10). Изображение входного сигнала  $u(p)$  определим, воспользовавшись преобразованием Лапласа (3.8). Тогда при нулевых начальных условиях изображение выходного сигнала  $y(p)$ , в соответствии с (3.10), имеет вид:

$$y(p) = W(p) u(p) = \frac{M(p)}{N(p)} u(p). \quad (3.11)$$

Оригинал  $y(t)$  — реакцию системы на входной сигнал — найдем, воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа (см. Приложения 1 и 2):

$$y(t) = L^{-1}[y(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-jb}^{a+jb} y(p) e^{pt} dp. \quad (3.12)$$

Вычисление оригинала, в соответствии с этим интегралом для изображений, являющихся дробно-рациональной функцией  $\frac{A(p)}{B(p)}$ , такой, что степень числителя меньше степени знаменателя, имеющего корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  кратностей  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , выполняют по формуле

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left[ (p - p_k)^{r_k} e^{p_k t} \frac{A(p_k)}{B(p_k)} \right]. \quad (3.13)$$

Если изображение  $y(p)$  является такой дробно-рациональной функцией  $\frac{A(p)}{B(p)}$ , что степень числителя меньше степени знаменателя и все корни знаменателя простые, т.е.  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ , то формула (3.13) упрощается, приобретая вид:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.14)$$

Вычисление оригиналов для дробно-рациональных изображений, в которых степень числителя равна степени знаменателя, будет описана в дальнейшем после введения  $\delta$ -функции.

Ниже приведены примеры, позволяющие лучше понять изложенный материал.

#### **Пример 3.4**

Тележка массой  $m$  находится в состоянии покоя. Тележка снабжена двигателем, позволяющим реализовать различную силу тяги  $F_T$ , не зависящую от скорости движения  $v$ . Сопротивление движению тележки линейно зависит от скорости:  $F_c = bv$ . В момент времени  $t = 0$  включается двигатель и к тележке прикладывается сила тяги  $F_{T0}$ . Требуется определить, как изменяется во времени скорость движения тележки.

Составим вначале модель объекта. В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения тележки имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = F_T - F_c.$$

Примем, что  $F_c = bv$ , тогда

$$m \frac{dv}{dt} + bv = F_T. \quad (3.15)$$

В момент времени  $t = 0$  включается сила тяги  $F_{T0}$ , т.е.

$$F_T = F_{T0} 1(t),$$

при этом

$$m \frac{dv}{dt} + bv = F_0 1(t). \quad (3.16)$$

Перейдя к изображениям в левой и правой части линейного дифференциального уравнения (3.16), получим:

$$mpv(p) + bv(p) = F_0 \frac{1}{p}.$$

Откуда

$$v(p) = W(p) \frac{F_0}{p} = \frac{kF_0}{p(1+Tp)},$$

где

$$T = \frac{m}{b}, \quad k = \frac{1}{b}.$$

Знаменатель изображения  $v(p)$  имеет два простых корня:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{T}.$$

Воспользовавшись формулой (3.14) перехода от изображений к оригиналам в случае простых корней, получим искомую зависимость скорости движения тележки от времени:

$$v(t) = kF_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right),$$

откуда очевиден физический смысл коэффициента  $T = \frac{m}{b}$  как постоянной времени тележки. С ростом  $T$  скорость тележки растет медленнее. Действительно,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{kF_0}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.17)$$

### Пример 3.5

Усложним предыдущую задачу, дополнив объект управления (тележку) регулятором скорости.

На рис. 3.5 показан объект управления — тележка, передаточную функцию которой  $W_T(p)$  получаем, переходя к изображениям левой и правой части дифференциального уравнения (3.15):

$$mp v(p) + bv(p) = F_T(p),$$

откуда

$$v(p) = \frac{1}{mp + b} F_T(p) = \frac{\frac{1}{b}}{1 + \frac{m}{b}p} F_T(p).$$

Обозначив,  $k_T = \frac{1}{b}$ ,  $T_T = \frac{m}{b}$  получаем передаточную функцию тележки:

$$W_T(p) = \frac{k_T}{T_T p + 1}. \quad (3.18)$$

Выход объекта управления — скорость  $v$  сравнивается в элементе сравнения с заданным значением скорости  $v_3$ . На выходе элемента сравнения величина рассогласования  $\Delta v = v_3 - v$  поступает на вход устройства управления, преобразующего рассогласование  $\Delta v$  в силу тяги в соответствии с заданным пропорционально-интегральным законом управления:

$$F_T = k_1 \Delta v + \frac{k_2}{T_{\text{рег}}} \int_0^t \Delta v dt, \quad (3.19)$$

где  $k_1, k_2$  — коэффициенты усиления;

$T_{\text{рег}}$  — постоянная времени устройства управления — регулятора скорости.

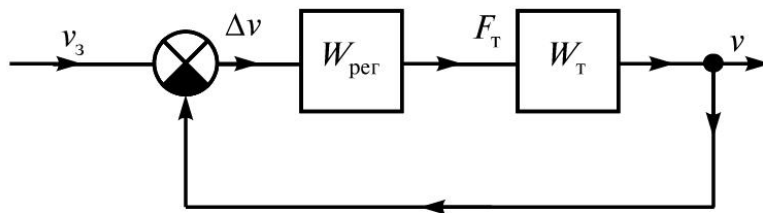


Рис. 3.5. Модель системы управления скоростью тележки

Из выражения (3.19) следует, что управление  $F_T$ , т.е. сигнал на входе объекта управления — тележки, пропорционален сумме рассогласования и интеграла от рассогласования заданного сигнала — скорости  $v_3$  и сигнала на выходе объекта управления  $v$ . Поэтому название закона управления — пропорционально-интегральный (ПИ). Переходя к изображениям, получаем:

$$F_T(p) = k_1 \Delta v(p) + \frac{k_2}{T_{\text{рег}}} \frac{\Delta v(p)}{p}.$$

Следовательно, передаточная функция устройства управления (регулятора) имеет вид:

$$W_{\text{рег}}(p) = \frac{F_T(p)}{\Delta v(p)} = k_1 + \frac{k_2}{T_{\text{рег}} p}. \quad (3.20)$$

В соответствии с рис. 3.2

$$v(p) = W_T(p) F_T(p); \quad (3.21)$$

$$F_T(p) = \Delta v(p) W_{\text{рег}}(p); \quad (3.22)$$

$$\Delta v(p) = v_3(p) - v(p). \quad (3.23)$$

Подставив (3.23) в (3.22), получаем:

$$F_T(p) = [v_3(p) - v(p)] W_{\text{рег}}(p). \quad (3.24)$$

Далее подставив это выражение в (3.21), после простых алгебраических преобразований имеем:

$$v(p) = \frac{W_T(p) W_{\text{рег}}(p)}{1 + W_T(p) W_{\text{рег}}(p)} v_3(p) = W(p) v_3(p), \quad (3.25)$$

где  $W(p) = \frac{W_T(p) W_{\text{рег}}(p)}{1 + W_T(p) W_{\text{рег}}(p)}$  — передаточная функция системы автоматического

управления скоростью движения тележки. Обратим внимание на то, что объект управления так же, как регулятор, является составной частью системы.

Если тележка находилась в состоянии покоя и требуется разогнать ее до скорости  $v_0$ , т.е. заданный входной сигнал имеет вид:

$$v_3(t) = v_0 1(t),$$

то изображение входного сигнала:

$$v_3(p) = L[v_3(t)] = \frac{v_0}{p},$$

а изображение сигнала на выходе системы в соответствии с (3.11) имеет вид:

$$v(p) = W(p) \frac{v_0}{p}. \quad (3.26)$$

Подставим в (3.26) передаточную функцию системы, выраженную через  $W_T(p)$  и  $W_{\text{рег}}(p)$ , тогда с учетом (3.18) и (3.20) получим:

$$\begin{aligned} v(p) &= v_0 \frac{k_T k_1 T_{\text{рег}} p + k_T k_2}{p \left( T_{\text{рег}} T_T p^2 + T_{\text{рег}} (k_T k_1 + 1) p + k_T k_2 \right)} = \\ &= \frac{\frac{k_1}{k_2} T_{\text{рег}} p + 1}{p \left( \frac{T_{\text{рег}} T_T}{k_T k_2} p^2 + T_{\text{рег}} \frac{k_T k_1 + 1}{k_T k_2} p + 1 \right)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Введем обозначения:

$$\frac{k_1}{k_2} T_{\text{рег}} = T_0; \quad \frac{T_{\text{рег}} T_T}{k_T k_2} = T_1^2; \quad \sqrt{\frac{T_{\text{рег}} T_T}{k_T k_2}} \cdot \frac{k_T k_1 + 1}{T_T} = 2n,$$

где  $T_0 > 0$ ;  $T_1 > 0$ ;  $n > 0$ .

Тогда

$$v(p) = \frac{T_0 p + 1}{(T_1^2 p^2 + 2n T_1 p + 1) p} v_0. \quad (3.28)$$

Для перехода к оригиналу найдем корни знаменателя  $v(p)$ :

$$p(T_1^2 p + 2n T_1 p + 1) = 0,$$

откуда

$$p_1 = 0; \quad p_{2,3} = \frac{-2n T_1 \pm \sqrt{4n^2 T_1^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 1}}{T_1}.$$



В зависимости от значений  $n$  корни  $p_{2,3}$  могут быть действительными или комплексными.

*Первый случай:*  $n > 1$ , оба корня различные действительные, отрицательные числа. Воспользовавшись формулой (3.14), перейдем к оригиналам:

$$v(t) = v_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_2 - \frac{T_0}{T_1} r_1 \frac{t}{T_1}}{r_2 - r_1} & e + \frac{r_1 - \frac{T_0}{T_2} r_2 \frac{t}{T_2}}{r_2 - r_1} e \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

где  $r_1 = n - \sqrt{n^2 - 1}$ ;  $r_2 = n + \sqrt{n^2 - 1}$ .

График переходного процесса приведен на рис. 3.6, а. Возможны различные виды переходного процесса в зависимости от параметров системы: без перерегулирования (сплошная линия), с перерегулированием (пунктирная линия).

*Второй случай:*  $n < 1$ , корни — комплексные сопряженные, т.е.

$$p_2 = \frac{1}{T_1} [-n + jr] = -\alpha + j\omega_{\text{св}}; \quad p_3 = \frac{1}{T_1} [-n - jr] = -\alpha - j\omega_{\text{св}},$$

где  $r = \sqrt{1 - n^2}$ ,  $\alpha = n\omega_{\text{с}}; \quad \omega_{\text{св}} = \omega_{\text{с}} \sqrt{1 - n^2}; \quad \omega_{\text{с}} = \frac{1}{T}$ .

Переходя к оригиналам, получаем:

$$v(t) = v_0 \left\{ 1 - \frac{e^{-\frac{n}{T_1} t}}{r} \left[ \sin \left( r \frac{t}{T_1} + \varphi \right) - \frac{T_0}{T_1} \sin \frac{rt}{T_1} \right] \right\}, \quad (3.30)$$

или

$$v(t) = v_0 \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{r} \left[ \sin (\omega_{\text{св}} t + \varphi) - \frac{T_0}{T_1} \sin \omega_{\text{св}} t \right] \right\},$$

где  $\varphi = \text{arctg} \frac{r}{n}$ .

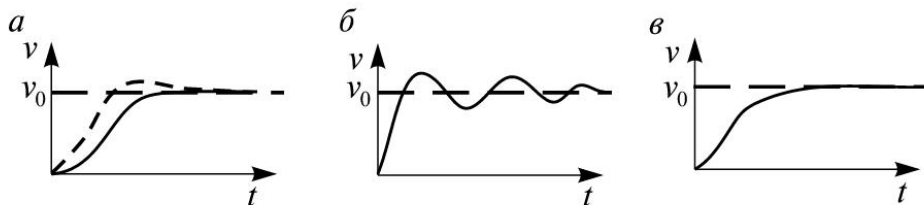


Рис. 3.6. Переходные характеристики системы управления скоростью тележки

График переходного процесса приведен на рис 3.6, б.

*Третий случай:*  $n = 1$ , корень — действительное отрицательное число кратности 2. Воспользовавшись формулой (3.13), получаем:

$$v(t) = v_0 \left\{ 1 - e^{\frac{-t}{T_1}} \left[ 1 + \frac{t}{T_1} \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right) \right] \right\}. \quad (3.31)$$

График переходного процесса приведен на рис 3.6, в.

Во всех трех случаях в установившемся режиме, т.е. при  $t \rightarrow \infty$ ,  $v(t) \rightarrow v_0$ .

На этом примере удобно проиллюстрировать сущность задач анализа и синтеза САУ. Определение реакции систем с заданными параметрами на известный входной сигнал с целью выяснения соответствия переходного и установившегося режимов, сформулированным техническим требованиям, является *задачей анализа САУ*.

Выбор параметров регулятора при известном законе управления с целью получения переходного и установившегося режима, удовлетворяющего при заданных входных сигналах сформулированным техническим требованиям, является *задачей параметрического синтеза САУ*. В данном примере известный закон управления — пропорционально-интегральный. Параметрами регулятора, которые можно изменить, являются  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $T_{\text{рег}}$ . В частности, одним из технических требований может быть монотонность переходного процесса.

Наиболее сложной задачей является *задача синтеза САУ*, результатом решения которой является выбор закона управления и его параметров с целью удовлетворения переходного и установившегося режима САУ сформулированным техническим требованиям при заданных входных сигналах. Эту задачу называют также аналитическим конструированием регуляторов.

Рассмотрим далее пример, иллюстрирующий нахождение реакции линейной системы, модель которой содержит кратные корни, на заданный входной сигнал.

### **Пример 3.6**

Передаточная функция объекта управления задана и имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)^2}.$$

Требуется найти сигнал  $y(t)$  на выходе объекта при входном сигнале

$$u(t) = 1(t), \text{ т.е. } u(p) = \frac{1}{p}.$$

Изображение выходного сигнала  $y(p)$  равно:

$$y(p) = u(p)W(p) = \frac{1}{p} \frac{k}{(Tp+1)^2}.$$

Уравнение третьей степени  $p(Tp+1)^2 = 0$  имеет корни  $p_1 = 0$  кратности 1 и корень  $p_2 = -\frac{1}{T}$  кратности 2. Тогда оригинал выходного сигнала, т.е. реакцию объекта на единичный скачок находим в соответствии с выражением (3.13):

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p e^{pt} \frac{k}{p(Tp+1)^2} + \lim_{p \rightarrow -\frac{1}{T}} \frac{d}{dp} \left\{ \left( p + \frac{1}{T} \right)^2 e^{pt} \frac{k}{p(Tp+1)^2} \right\} = \\ &= k + \lim_{p \rightarrow -\frac{1}{T}} \frac{d}{dp} \left[ \frac{k}{T^2} e^{pt} \frac{1}{p} \right] = k \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}} \right]. \end{aligned}$$

Отметим еще одно существенное свойство преобразования Лапласа, позволяющее в ряде случаев просто получать искомый результат. Пусть  $y(t) = L^{-1}[y(p) = W(p)x(p)]$  — сигнал на выходе системы, когда на ее входе имеем сигнал  $x(t)$ . Сигнал  $y(t)$  определяет переходный и установившийся режим функционирования системы. Обозначим сигнал установившегося режима  $y_{уст}$ .

Очевидно, что  $y_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ , при условии, что этот предел существует. Значение  $y_{уст}$  можно найти без перехода от изображения  $y(p)$  к оригиналу. В соответствии со свойствами преобразования Лапласа

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p y(p).$$

### Пример 3.7

Передаточная функция системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}.$$

На входе системы — единичный скачок  $x(t) = 1(t)$ .

Требуется определить установившееся значение сигнала  $y(t)$  на выходе системы.

Изображение для  $y(t)$  равно:

$$y(p) = \frac{k}{Tp+1} x(p).$$

Изображение для  $x(t)$  равно:

$$x(p) = \frac{1}{p}.$$

Тогда

$$y(p) = \frac{k}{p(Tp+1)} \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} py(p) = k.$$

Значение функции  $y(t)$  при  $t \rightarrow 0$  можно найти, также воспользовавшись свойством преобразования Лапласа (см. Приложение 1).

Если  $y(p) = L[y(t)]$ , то  $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} py(p)$ .

В примере 3.7

$$y(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{k}{(Tp+1)p} = 0.$$

Определим связь между импульсной характеристикой и передаточной функцией системы. Примем за основу формулу (3.11) для определения изображения реакции системы:

$$y(p) = W(p)u(p).$$

Примем в этом выражении, что  $u(p) = \delta(p) = 1$ , тогда  $y(p) = k(p)$  и  $k(p) = W(p)$  или

$$L\{k(t)\} = W(p), \quad \text{т.е.} \quad k(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (3.32)$$

Таким образом, **передаточная функция описывает динамические свойства системы в области оператора Лапласа.**

Найдем оригинал для изображения, являющегося дробно-рациональной функцией, когда степень числителя равна степени знаменателя.

Пусть

$$y(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (3.33)$$

Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$y(p) = \frac{a_n}{b_n} + \frac{D(p)}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

где  $D(p)$  — многочлен, степень которого не превышает  $n-1$ , — остаток от деления  $A(p)$  на  $B(p)$ .

Тогда

$$L^{-1}[y(p)] = L^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + L^{-1}\left[\frac{D(p)}{B(p)}\right]. \quad (3.34)$$

Так как  $L[\delta(t)] = 1$ , то  $L^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_n}{b_n} L^{-1}(1) = \frac{a_n}{b_n} \delta(t)$  и обратное преобразование Лапласа от второго слагаемого можно найти по формуле (3.13). Таким образом, получен способ определения оригинала изображения  $\frac{A(p)}{B(p)}$ , когда степень числителя равна степени знаменателя.

### **Пример 3.8**

Для условий примера 3.4 найти импульсную характеристику.

Передаточная функция объекта имеет вид:

$$W(p) = \frac{F_0}{b} \frac{1}{1+Tp},$$

откуда

$$k(t) = L^{-1}\left(\frac{F_0}{b} \frac{1}{1+Tp}\right) = \frac{F_0}{bT} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Этот же результат получается при непосредственном дифференцировании переходной функции (см. выражение 3.17).

### Пример 3.9

Найти импульсную характеристику электрической цепи, приведенной на рис. 3.7. На входе цепи напряжение  $u$ , на выходе напряжение  $u_{\text{ВЫХ}}$ .

В соответствии с законом Кирхгофа

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + iR.$$

Напряжение на выходе цепи  $u_{\text{ВЫХ}} = iR$ .

Тогда

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{u_{\text{ВЫХ}}}{R} dt + u_{\text{ВЫХ}}.$$

Переходя к изображениям, получаем:

$$u(p) = \frac{1}{pRC} u_{\text{ВЫХ}}(p) + u_{\text{ВЫХ}}(p).$$

Откуда передаточная функция цепи при  $RC = T$  имеет вид:

$$W(p) = \frac{u_{\text{ВЫХ}}(p)}{u(p)} = \frac{pT}{1 + pT}.$$

Импульсная (весовая) переходная функция определяется как обратное преобразование Лапласа от  $W(p)$ :

$$k(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1}\left(\frac{pT}{1 + pT}\right).$$

Так как изображение — отношение двух многочленов одинаковых степеней, то непосредственно использовать формулу обращения (3.14) нельзя. Разделив числитель  $W(p)$  на знаменатель, получим:

$$W(p) = \frac{pT}{1 + pT} = 1 - \frac{1}{1 + pT}.$$

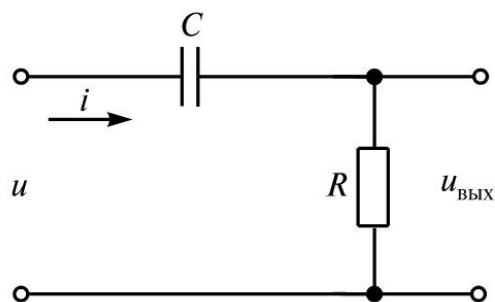


Рис. 3.7. Электрическая цепь



Тогда в соответствии с (3.14) и (3.32)

$$k(t) = L^{-1}(1) - L^{-1}\left(\frac{1}{1 + pT}\right) = \delta(t) - e^{-\frac{t}{T}}.$$

**Пример 3.10**

Математическая модель системы описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} + a_0 y = x.$$

Требуется определить реакцию системы на входной сигнал  $x(t) = bt$ .

Применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям уравнения, получим:

$$py(p) + a_0 y(p) = x(p).$$

Следовательно, передаточная функция системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1}{p + a_0}.$$

Корень характеристического уравнения  $p + a_0 = 0$  равен:  $p_1 = -a_0$ . Тогда импульсная характеристика системы в соответствие с формулой обращения (3.14) имеет вид:

$$k(t) = L^{-1}[W(p)] = e^{-a_0 t}.$$

Реакцию системы на заданный входной сигнал найдем на основе интеграла свертки в виде

$$y(t) = \int_0^t e^{-a_0 \tau} b(t - \tau) d\tau = \frac{b}{a_0} \left[ t - \frac{1}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) \right].$$

До сих пор определялась реакция системы на заданный входной сигнал как результат решения неоднородного дифференциального уравнения (дифференциального уравнения, правая часть которого отлична от нуля). Можно анализировать процессы в системе при отсутствии сигнала на входе, рассматривая изменения выходного сигнала во времени при ненулевых начальных условиях. По существу требуется определить решения однородного дифференциального уравнения при ненулевых начальных условиях. Пусть модель объекта в соответствии с (3.5) при отсутствии входного сигнала имеет вид:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0. \quad (3.35)$$

Начальные условия зададим в виде

$$\left. \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0} = b_{n-1}; \quad \left. \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} \right|_{t=0} = b_{n-2}; \quad \dots; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = b_1; \quad y(0) = b_0.$$

Используя преобразование Лапласа, с учетом ненулевых начальных условий, получаем:

$$\begin{aligned} & a_n \left[ p^n y(p) - p^{n-1} b_0 - p^{n-2} b_1 - \dots - b_{n-1} \right] + \\ & + a_{n-1} \left[ p^{n-1} y(p) - p^{n-2} b_0 - p^{n-3} b_1 - \dots - b_{n-2} \right] + \dots + \\ & + a_1 \left[ p y(p) - b_0 \right] + a_0 y(p) = 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$y(p) \sum_{i=0}^n a_i p^i = a_n \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i} p^i + a_{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} p^i b_{n-2-i} + \dots + a_1 b_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y(p) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} & \left[ a_n b_0 p^{n-1} + (a_n b_1 + a_{n-1} b_0) p^{n-2} + \right. \\ & + (a_n b_2 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_0) p^{n-3} + \dots + \\ & \left. + a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_{n-2} + a_{n-2} b_{n-3} + \dots + a_1 b_0 \right] = \frac{D(p)}{A(p)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Переходя от изображений к оригиналам в соответствии с формулой (3.14), получаем решение однородного дифференциального уравнения (3.35), которое называют *свободной составляющей* переходного процесса.

### Пример 3.11

Требуется найти свободную составляющую переходного процесса для системы, модель которой при нулевом входном сигнале имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Начальные условия заданы:

$$y(0) = 5, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 2.$$

Характеристическое уравнение системы  $p^2 + 3p + 2 = 0$  имеет два корня  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -2$ .

Изображение сигнала на выходе системы

$$y(p) = \frac{5p + 2 + 3 \cdot 5}{p^2 + 3p + 2} = \frac{5p + 17}{p^2 + 3p + 2}.$$

Переходя к оригиналам по формуле (3.14), получаем свободную составляющую переходного процесса:

$$y(t) = 12e^{-t} - 7e^{-2t}.$$

Очевидно, что

$$y(0) = 5, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -12e^{-t} + 14e^{-2t} \Big|_{t=0} = 2$$

соответствует условию задачи

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dt} = 0,$$

что свидетельствует о возвращении системы в состояние покоя.

Итак, получена реакция системы на изменение начальных условий. Ранее различными способами решалась задача определения сигнала на выходе системы при заданном входном сигнале и нулевых начальных условиях. Осталось рассмотреть реакцию системы на входной сигнал при ненулевых начальных условиях.

Пусть модель системы имеет вид:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^m c_j \frac{d^j u}{dt^j}, \quad m \leq n.$$

Начальные условия заданы:

$$\left. \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0} = b_{n-1}; \quad \left. \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} \right|_{t=0} = b_{n-2}; \dots; \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = b_1; y(0) = b_0.$$

Используя преобразования Лапласа с учетом ненулевых начальных условий, получаем:

$$\begin{aligned} & a_n \left[ p^n y(p) - p^{n-1} b_0 - p^{n-2} b_1 - \dots - b_{n-1} \right] + \\ & + a_{n-1} \left[ p^{n-1} y(p) - p^{n-2} b_0 - p^{n-3} b_1 - \dots - b_{n-2} \right] + \\ & + \dots + a_1 \left[ p y(p) - b_0 \right] + a_0 y(p) = \sum_{j=0}^m c_j p^j u(p), \end{aligned}$$

откуда

$$y(p) = \frac{D(p)}{A(p)} + \frac{\sum_{j=0}^m c_j p^j}{A(p)} u(p), \quad (3.37)$$

где  $D(p)$  — числитель (3.36);

$A(p)$  — знаменатель (3.36);

$\frac{\sum_{j=0}^m c_j p^j}{A(p)} = W(p)$  — передаточная функция системы.

Переходя к оригиналам, получаем:

$$y(t) = L^{-1} \left[ \frac{D(p)}{A(p)} \right] + L^{-1} [W(p) u(p)], \quad (3.38)$$

где первое слагаемое — *свободная составляющая* переходного процесса, второе слагаемое — реакция системы с нулевыми начальными условиями на входной сигнал — так называемая *вынужденная составляющая*.

Таким образом, в общем случае сигнал на выходе системы определяется суммой свободной и вынужденной составляющих.

### 3.3. Понятие об устойчивости линейных систем.

#### Условия устойчивости А.М. Ляпунова

Допустим, что на входе линейной системы, описываемой уравнением (3.5), имеется не изменяющийся входной сигнал. Тогда система в момент времени  $t \leq \tau_0$  будет находиться в установившемся состоянии. Это значит, что все ее фазовые координаты  $y_i$  не будут зависеть от времени, т.е. будет выполняться условие:  $\dot{y}_i = 0$  и фазовые координаты будут равны  $y_{0i}$ . Допустим также, что в момент времени  $t > \tau_0$  к системе приложено внешнее воздействие, вызывающее переходный процесс движения системы. *Линейная система является устойчивой, если после приложения внешнего воздействия она с течением времени возвратится в прежнее исходное установившееся состояние или перейдет в новое установившееся состояние.* В противном случае линейная система будет неустойчива.

Строгие и законченные обоснования условий устойчивости были впервые выполнены А.М. Ляпуновым в 1870 г. Им были сформулированы две теоремы устойчивости, до сих пор не потерявшие своего значения. Ограничимся упрощенным рассмотрением первой из этих теорем. Эта теорема сводится к тому, что *для исследования устойчивости линейной системы достаточно рассмотреть ее свободное движение, возникающее при действии ненулевых начальных условий.*

Для определения свободного движения системы необходимо найти решение однородного дифференциального уравнения:

$$\sum_{i=1}^n T_{yi} \frac{d^i y}{dt^i} + y = 0. \quad (3.39)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид:

$$y_{\text{св}} = \sum_{i=0}^n D_i e^{p_i t}, \quad (3.40)$$

где  $D_i$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;  
 $p_i$  — корни характеристического уравнения.

В соответствии с (3.40) вид свободного движения целиком определяется характером корней  $p_i$ . Рассмотрим возможные результаты.

1.  $p_1 = -\alpha$  — отрицательный вещественный корень.

В этом случае составляющая свободного движения (3.40) имеет вид:  $y_{\text{св1}} = D_1 e^{-\alpha t}$ . График этой составляющей (рис. 3.8, а) является затухающим, и, следовательно, данная составляющая свободного движения — *устойчива*.

2.  $p_2 = \alpha$  — положительный вещественный корень.

В этом случае составляющая свободного движения (3.40) имеет вид:  $y_{\text{св2}} = D_2 e^{\alpha t}$ . График этой составляющей (рис. 3.8, б) представляет собой неограниченно возрастающую функцию, и, следовательно, такая составляющая свободного движения — *неустойчива*. Такое движение совершает шарик, находящийся на вершине выпуклой поверхности. Под действием ненулевого начального условия шарик сдвинется от положения равновесия и затем начнет неограниченно удаляться от этого положения.

3.  $p_3 = 0$  — нулевой корень.

Составляющая свободного движения (3.40) имеет вид:  $y_{\text{св3}} = D_3$ . График этой составляющей (рис. 3.8, в) представляет собой горизонтальную прямую. Это значит, что под действием начального условия система отклонится от положения равновесия и останется в таком

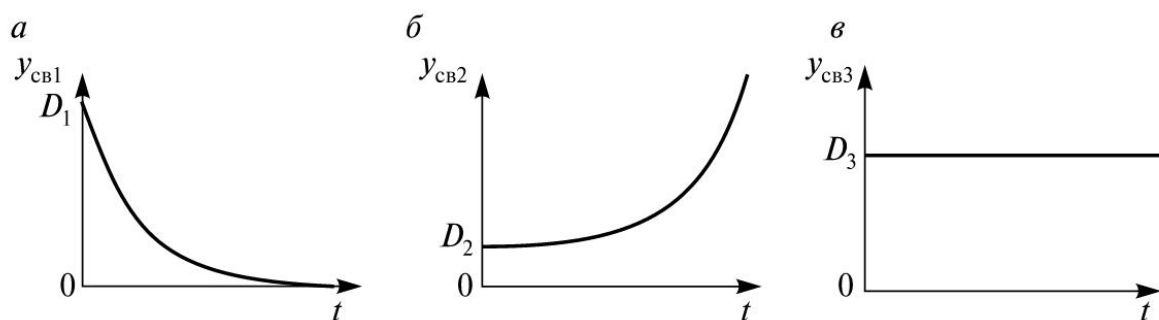


Рис. 3.8. Графики свободного движения:  
 а —  $p_1 = -\alpha$ ; б —  $p_2 = \alpha$ ; в —  $p_3 = 0$



состоянии, а степень удаления от положения равновесия определяется величиной начального условия, т.е. величиной  $D_3$ . Такое движение совершает шарик, расположенный на горизонтальной поверхности с трением. Под действием ненулевого начального условия шарик удаляется от положения равновесия на величину постоянной интегрирования  $D_3$  и остается в этом положении. Составляющую свободного движения  $y_{св3}$  называют *нейтральной*. При таком движении говорят, что *система находится на границе апериодической устойчивости* и малейшее изменение ее параметров в результате старения или износа может перевести систему в устойчивый или неустойчивый режимы работы.

4.  $p_{4-1} = -\alpha + j\omega$  и  $p_{4-2} = -\alpha - j\omega$  — пара комплексно сопряженных корней с отрицательной вещественной частью.

Составляющая свободного движения (3.40), соответствующая этим корням, имеет вид:

$$y_{св4} = D_{4-1}e^{(-\alpha+j\omega)t} + D_{4-2}e^{(-\alpha-j\omega)t} = D_4^*e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $D_{4-1}$  и  $D_{4-2}$  или  $D_4^*$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования.

График этой составляющей (рис. 3.9) представляет собой затухающую синусоиду, сдвинутую относительно начала координат на угол  $\varphi$ . Такая составляющая свободного движения *устойчива*.

5.  $p_{5-1} = \alpha + j\omega$  и  $p_{5-2} = \alpha - j\omega$  — пара комплексно сопряженных корней с положительной вещественной частью.

Составляющая свободного движения, соответствующая этим корням, имеет вид:

$$y_{св5} = D_{5-1}e^{(\alpha+j\omega)t} + D_{5-2}e^{(\alpha-j\omega)t} = D_5^*e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $D_{5-1}$  и  $D_{5-2}$  или  $D_5^*$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования.

График этой составляющей (рис. 3.10) представляет собой нарастающие колебания, сдвинутые

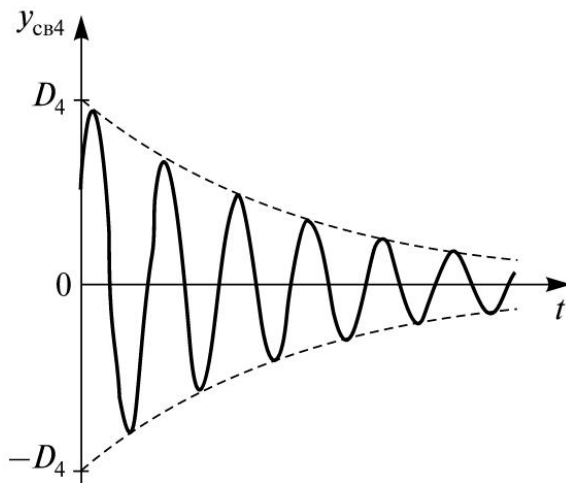


Рис. 3.9. График свободного движения при комплексно сопряженных корнях с отрицательной вещественной частью

относительно начала координат на угол  $\varphi$ . Такая составляющая свободного движения *неустойчива*.

6.  $p_{6-1} = +j\omega$  и  $p_{5-2} = -j\omega$  — пара чисто мнимых корней (комплексных корней с нулевой вещественной частью).

Составляющая свободного движения, соответствующая этим корням, имеет вид:

$$y_{св6} = D_{6-1}e^{j\omega t} + D_{5-2}e^{-j\omega t} = D_6^* \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $D_{6-1}$  и  $D_{6-2}$  или  $D_6^*$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования.

График этой составляющей (рис. 3.11) представляет собой незатухающие периодические колебания, сдвинутые относительно начала координат на угол  $\varphi$ .

Такая составляющая свободного движения *нейтральна*. При таком движении говорят, что **система находится на границе колебательной устойчивости** и малейшее изменение ее параметров в результате старения или износа может перевести систему в устойчивый или неустойчивый режимы работы.

Поскольку свободное движение системы в соответствии с (3.40) определяется как сумма отдельных составляющих, а также в связи с тем, что составляющие, соответствующие корням с отрицательной вещественной частью, затухают, то через некоторое время все свободное движение будет определяться только теми составляющими, которые соответствуют корням с положительной или нулевой вещественной частью.

Таким образом, располагая корни характеристического уравнения на комплексной области (рис. 3.12), можно сфор-

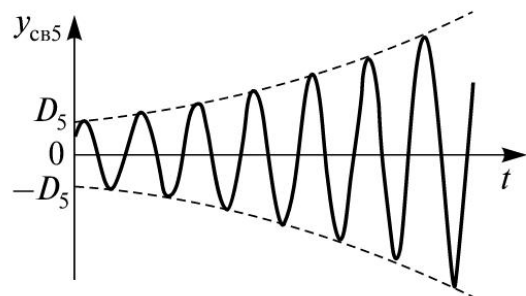


Рис. 3.10. График свободного движения при комплексно сопряженных корнях с положительной вещественной частью

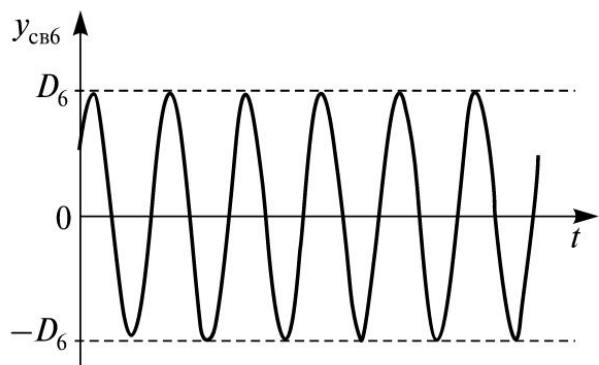


Рис. 3.11. График свободного движения при комплексных корнях с нулевой вещественной частью

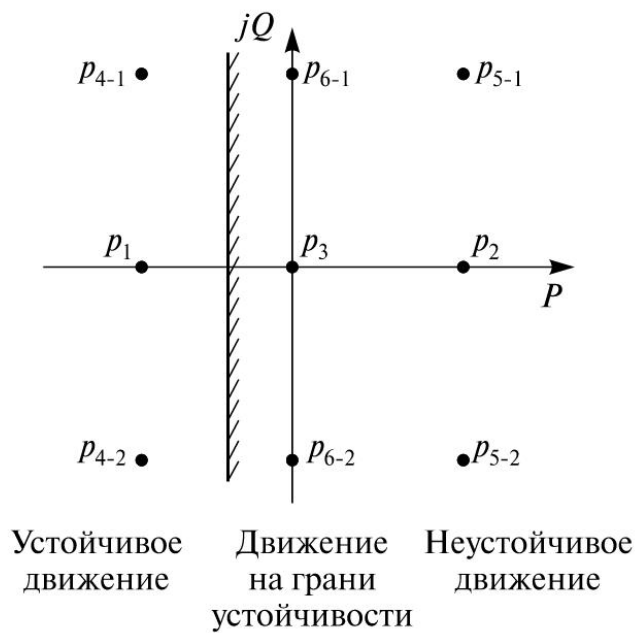


Рис. 3.12. Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости

мулировать условия устойчивости линейных систем:

1. **Система является устойчивой**, если все корни ее характеристического уравнения — левые (лежат в левой полуплоскости).

2. **Система является неустойчивой**, если среди левых корней характеристического уравнения имеется хотя бы один не левый корень.

3. **Система находится на границе аperiodической устойчивости**, если среди левых корней характеристического уравнения имеется хотя бы один нулевой корень.

4. **Система находится на границе колебательной устойчивости**, если среди левых корней характеристического уравнения имеется, хотя бы один чисто мнимый корень, т.е. комплексный корень с нулевой вещественной частью.

Как следует из выполненного анализа, оценка условия устойчивости движения определяется видом корней характеристического уравнения. Однако отыскание этих корней не представляет трудностей, если порядок характеристического уравнения не выше трех. Вычисление корней уравнения четвертой степени уже сопряжено с определенными трудностями. В двадцатых годах XIX в. Абель доказал, что формулы для определения корней алгебраического уравнения через коэффициенты этого уравнения не могут быть найдены, если степень уравнения  $n \geq 5$ . Поэтому разработчику систем управления необходимо уметь делать выводы о результатах моделирования, не решая систему уравнений, т.е. без определения корней характеристического уравнения. Для этого разработаны так называемые критерии устойчивости, которые позволяют сделать вывод об устойчивости систем без вычисления корней характеристического уравнения. Эти критерии будут рассмотрены во второй части настоящего учебника.

---

## Глава 4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

### 4.1. Частотные характеристики устойчивых систем

При анализе линейных систем рассматривают переходную функцию  $h(t)$  и импульсную (весовую) характеристику  $k(t)$ , определяемые соответственно как реакция линейной системы на сигналы  $1(t)$  и  $\delta(t)$  (см. главу 3, п. 3.2). Эти характеристики называются временными. Если в качестве типового сигнала выбрать гармонический сигнал, то, как будет показано ниже, можно получить различные частотные характеристики системы, определяемые ее динамическими свойствами.

Пусть модель системы описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Будем искать реакцию такой системы на гармонический сигнал:

$$x(t) = x_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.1)$$

где  $x_0(\omega)$  — амплитуда гармонического входного сигнала;

$\omega$  — частота, имеющая свободную и вынужденную составляющие.

В установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$  в устойчивых системах свободная составляющая стремится к нулю. Вынужденная составляющая, как известно из теории дифференциальных уравнений, является гармоническим сигналом той же частоты, амплитуда и фаза которого отличается от соответствующих параметров входного сигнала:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0(\omega) \cos[\omega t + \varphi_0 + \varphi(\omega)], \quad (4.2)$$

где  $y_0(\omega)$  — амплитуда гармонического сигнала с частотой  $\omega$  на выходе системы;

$\varphi_0(\omega)$  — изменение фазы гармонического сигнала с частотой  $\omega$ .

Очевидно, что в тривиальном случае, когда система безынерционна и  $y_0(t) = kx(t)$ , фазы выходного и входного сигналов равны, т.е.  $\varphi(\omega) = 0$ , а амплитуды связаны соотношением

$$y_0(\omega) = kx_0(\omega).$$

**Амплитудной частотной характеристикой** системы называют зависимость отношения амплитуды гармонического выходного сигнала к амплитуде гармонического входного сигнала от частоты:

$$A(\omega) = \frac{y_0(\omega)}{x_0(\omega)}. \quad (4.3)$$

**Фазовой частотной характеристикой** называют зависимость разности фаз гармонического выходного сигнала и гармонического входного сигнала от частоты. При введенных в (4.2) обозначениях фазовой частотной характеристикой является  $\varphi(\omega)$ . Особенности ее определения будут даны ниже. Подчеркнем, что сигналы на выходе системы рассматриваются в установившемся режиме.

Очевидно, что возможным путем аналитического получения частотных характеристик может быть определение вынужденной составляющей решения дифференциального уравнения, являющегося моделью системы, при гармоническом входном сигнале с дальнейшим вычислением  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ .

Экспериментально частотные характеристики устойчивых линейных систем могут быть получены после измерения зависимости от частоты амплитуды сигнала на выходе системы и разности фаз между гармоническим сигналом на выходе и входе системы. Следует отметить, что измерение соответствующих параметров необходимо проводить после окончания переходных процессов.

Приведенные рассуждения описывают физический смысл частотных характеристик устойчивых систем. Вместе с тем для решения дифференциального уравнения, являющегося моделью системы, необходимо вычисление корней его характеристического уравнения. Как уже было сказано, при 4-м порядке дифференциального уравнения это сопряжено с определенными трудностями, а при порядке выше четвертого корни не выражаются аналитически через коэффициенты уравнения. Поэтому поставим задачу получения частотных характеристик без решения дифференциального уравнения.

Пусть  $W(p)$  — передаточная функция системы, получаемая при известном дифференциальном уравнении системы. Будем рассматривать входной сигнал вида

$$x(t) = x_0 e^{j\omega t} = x_0 \cos \omega t + jx_0 \sin \omega t. \quad (4.4)$$

Так как работа системы описывается линейным оператором, то решение уравнения при данном  $x(t)$  является суммой решений для действительной и мнимой частей. Изображение по Лапласу входного сигнала (4.4.) имеет вид:

$$x(p) = L[x_0 e^{j\omega t}] = \frac{x_0}{p - j\omega}.$$

Изображение реакции линейной системы на этот входной сигнал

$$y(p) = W(p) x(p) = W(p) \frac{x_0}{p - j\omega}.$$

Пусть передаточная функция системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (4.5)$$

где  $M(p)$  и  $N(p)$  — многочлены соответственно  $m$ -й и  $n$ -й степени при условии, что  $m \leq n$ .

Тогда  $y(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \frac{x_0}{p - j\omega}$ , и оригинал  $y(t)$  найдем, используя формулу обращения.

Уравнение  $N(p)(p - j\omega) = 0$  имеет  $n+1$  корней, из которых  $n$  находится из уравнения  $N(p) = 0$  и один из условия  $p - j\omega = 0$ , т.е.  $p_{n+1} = j\omega$ . Для упрощения выкладок положим, что  $n$  корней  $p_1, p_2, \dots, p_n$  характеристического уравнения системы различны. Тогда в соответствии с формулой обращения

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} + x_0 \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)} e^{j\omega t}.$$



В устойчивой системе корни  $p_k$  имеют отрицательную действительную часть. Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  первое слагаемое этого выражения стремится к нулю и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = x_0 e^{j\omega t} \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}.$$

Откуда следует, что установившееся значение сигнала на выходе линейной устойчивой системы при входном сигнале  $x_0 e^{j\omega t}$  равно произведению этого сигнала на передаточную функцию системы после замены  $p$  на  $j\omega$ , т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = x_0 e^{j\omega t} W(j\omega). \quad (4.6)$$

Переходя к показательной форме записи комплексной переменной, получаем:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.7)$$

при этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} x_0 e^{j\omega t}. \quad (4.8)$$

Из этого выражения очевидно, что  $A(\omega)$  является амплитудной частотной (АЧХ), а  $\varphi(\omega)$  — фазовой частотной (ФЧХ) характеристиками. Более подробное рассмотрение ФЧХ будет выполнено ниже.

Таким образом, АЧХ и ФЧХ получают после подстановки в выражение передаточной функции  $p = j\omega$  и перехода к показательной форме записи функции комплексной переменной. Следовательно, поставленная выше задача получения частотных характеристик без решения дифференциального уравнения, выполнена.

**Частотной характеристикой (ЧХ)** называют выражение

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (4.9)$$

Эту характеристику получают после подстановки  $p = j\omega$  в выражение передаточной функции  $W(p)$ . Представление  $W(j\omega)$  в алгебраической форме

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (4.10)$$

дает еще два вида частотных характеристик: *вещественную частотную характеристику*  $P(\omega)$  и *мнимую частотную характеристику*  $Q(\omega)$ .

Очевидна связь АЧХ с  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ :

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}. \quad (4.11)$$

Вернемся к определению фазовой частотной характеристики. Аргумент (Arg) комплексного числа  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  при фиксированной частоте  $\omega$  определяется (рис. 4.1) с точностью до любого слагаемого, кратного  $2\pi$ :

$$\varphi^*(\omega) = \text{Arg } W(j\omega) = \begin{cases} \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} + 2k\pi, & \text{I и IV квадранты;} \\ \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} + (2k+1)\pi, & \text{II и III квадранты,} \end{cases}$$

где  $\text{arctg}$  определяется в диапазоне  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$

Символ  $\text{Arg } W(j\omega)$  обозначает всю совокупность значений аргумента. В дальнейшем будем употреблять символ  $\text{Arg } W(j\omega)$ , обозначая им одно какое-либо из значений  $\text{Arg } W(j\omega)$ , в случае необ-

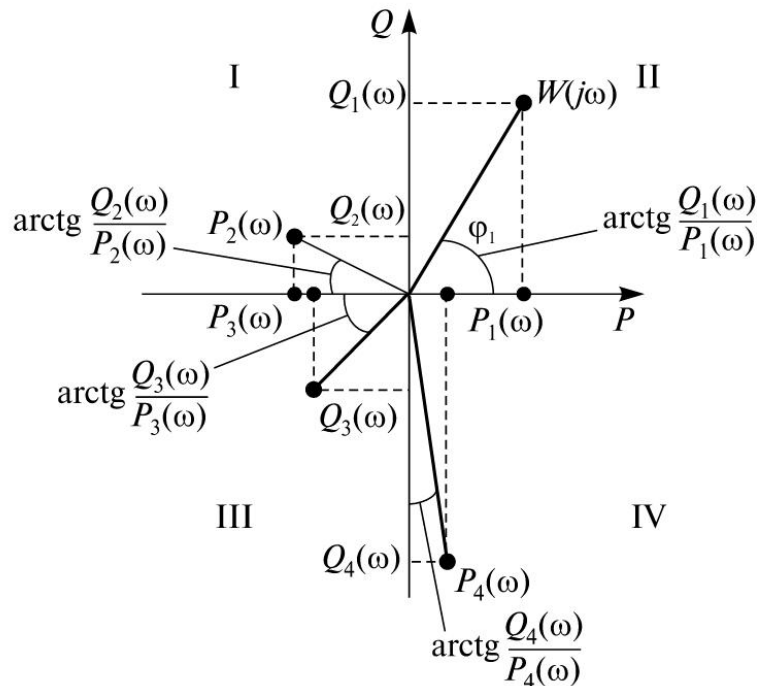


Рис. 4.1. К определению аргумента комплексного числа

ходимости специально оговаривая, какое именно значение берется. В ряде случаев удобно через  $\text{Arg } W(j\omega)$  обозначать значение аргумента, заключенное в пределах  $\varphi_0 \geq \text{Arg } W(j\omega) > -2\pi + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  произвольное фиксированное число. В теории автоматического управления обычно принимают  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg } W(j\omega) < -\frac{3\pi}{2}$  и  $\text{Arg } W(j\omega) = \text{Arg } W(j\omega) \pm 2\pi k$ .

Следовательно,

$$\varphi^*(\omega) = \text{Arg } W(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } Q(\omega) > 0 \text{ и } P(\omega) = 0; \\ \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} & \text{при } P(\omega) > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } Q(\omega) < 0 \text{ и } P(\omega) = 0; \\ -\pi + \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} & \text{при } P(\omega) < 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

В соответствии с приведенными соотношениями принято положительное значение  $\varphi^*(\omega)$  отсчитывать от положительного направления вещественной оси против часовой стрелки, а отрицательное — по часовой стрелке.

*Фазовой частотной характеристикой* системы, в отличие от аргумента  $\text{Arg } W(j\omega)$  комплексного числа, определенного в диапазоне от  $-\frac{3\pi}{2}$  до  $-\frac{\pi}{2}$ , принято считать величину  $\varphi(\omega)$  на тех частотах, при которых  $\frac{\pi}{2} \geq \varphi^*(\omega) > -\frac{3\pi}{2}$ , и являющуюся непрерывным продолжением  $\varphi^*(\omega)$  при больших частотах. Принято считать:

если  $Q(0) = 0$ , то  $\varphi(0) = 0$ ;

если  $W_2(j\omega) = (j\omega)^n W_1(j\omega)$ , то

$$\varphi(0) = \begin{cases} n\frac{\pi}{2} & \text{при } \lim_{\omega \rightarrow 0} W_1(j\omega) > 0; \\ \pi + \frac{n\pi}{2} & \text{при } \lim_{\omega \rightarrow 0} W_1(j\omega) < 0. \end{cases}$$

Фазовую частотную характеристику рассчитывают при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . Пусть, например, при  $\omega = 0$  значение  $\varphi(0) = 0$  (рис. 4.2). При увеличении  $\omega$  от 0 до 10 рад/с значение  $\varphi(\omega)$  изменя-

ется от 0 до  $-\frac{\pi}{6}$ . При изменении  $\omega$  от 10 до 100 рад/с комплексное число  $W(j\omega)$  находится вначале в IV квадранте комплексной плоскости (см. рис. 4.2), затем в III, II и I, после чего попадает опять в

IV квадрант и при  $\omega = 100$  рад/с его аргумент равен  $-\frac{\pi}{4}$ . В этом случае величину  $\varphi(\omega = 100 \text{ рад/с})$  рассчитывают следующим образом:  

$$\varphi(\omega = 100 \text{ рад/с}) = -2\pi - \frac{\pi}{4}.$$

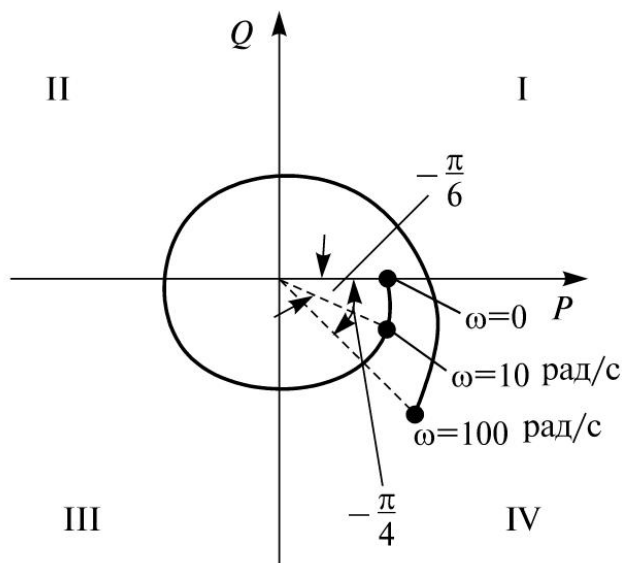


Рис. 4.2. К определению ФЧХ

## 4.2. Способы представления частотных характеристик

Частотную характеристику (ЧХ) графически представляют на комплексной плоскости (рис. 4.3). При этом для фиксированного значения  $\omega = \omega_i$  откладывают по мнимой оси величину  $Q(\omega_i)$ , а на действительной оси величину  $P(\omega_i)$  и получают точки  $a_i$  на плоскости, соответствующие  $W(j\omega_i)$ . Соединив начало координат с точкой  $a_i$ , получаем вектор  $W(j\omega_i)$ . При изменении частоты от 0 до  $\infty$  вектор  $W(j\omega)$  изменяется по модулю и поворачивается, поскольку его аргумент  $\varphi(\omega_i)$  также зависит от частоты. В результате конец векто-

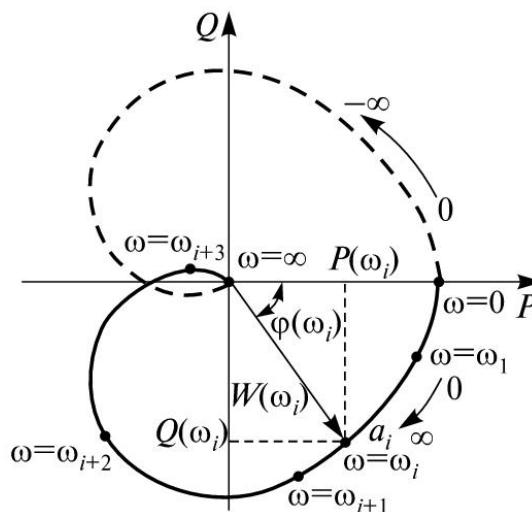


Рис. 4.3. Пример АФХ линейной системы

ра  $W(j\omega)$  опишет кривую, которую называют *годографом ЧХ* или *амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ)* [1, 30, 32]. АФХ снабжается соответствующими частотными отметками и стрелкой, указывающей направление изменения частоты от 0 до  $\infty$ .

Выражение (4.10) представляет собой уравнение этого годографа в зависимости от параметра  $\omega$  в декартовых координатах. Выражения (4.9), (4.11) и (4.12) являются параметрическим уравнением годографа в полярных координатах.

АФХ, приведенная на рис. 4.3, соответствует системе третьего порядка ( $n = 3$ ) с частотной характеристикой

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}.$$

В дальнейшем в п. 4.3 для получения импульсной характеристики потребуется выполнить интегрирование ЧХ при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Поэтому рассмотрим годограф ЧХ при отрицательных частотах, когда передаточная функция задана отношением полиномов  $M(p)$  и  $N(p)$  соответственно  $m$ -й и  $n$ -й степени (см. выражение (4.5)). Если в полиноме любой степени относительно  $p$  сделать подстановку  $p = j\omega$ , то получим полином относительно  $\omega$ . Причем коэффициенты этого полинома при четных степенях  $\omega$  будут действительными числами, при нечетных степенях  $\omega$  — мнимыми. Если в этом же полиноме сделать подстановку  $p = -j\omega$ , то его коэффициенты при четных степенях  $\omega$  не будут отличаться от коэффициентов ранее полученного полинома, т.е. знаки действительных коэффициентов не изменятся, коэффициенты полинома при нечетных степенях  $\omega$  будут иметь противоположный знак, т.е. изменятся знаки у мнимых коэффициентов. Следовательно, полученные при этих подстановках степенные функции будут комплексно-сопряженными. Применительно к передаточной функции (4.5) при подстановке  $p = j\omega$  получаем:

$$\begin{aligned} W(p = j\omega) &= \frac{M_1(\omega) + jM_2(\omega)}{N_1(\omega) + jN_2(\omega)} = \\ &= \frac{[M_1(\omega)N_1(\omega) + M_2(\omega)N_2(\omega)] - j[M_1(\omega)N_2(\omega) - M_2(\omega)N_1(\omega)]}{N_1^2(\omega) + N_2^2(\omega)}, \quad (4.13) \end{aligned}$$

при подстановке  $p = -j\omega$ :

$$W(p = -j\omega) = \frac{M_1(\omega) - jM_2(\omega)}{N_1(\omega) - jN_2(\omega)} =$$

$$= \frac{[M_1(\omega)N_1(\omega) + M_2(\omega)N_2(\omega)] - j[M_2(\omega)N_1(\omega) - M_1(\omega)N_2(\omega)]}{N_1^2(\omega) + N_2^2(\omega)}. \quad (4.14)$$

Сравнение выражений (4.13) и (4.14) свидетельствует о том, что при отрицательных частотах функция комплексного переменного является комплексно-сопряженной ЧХ при положительных частотах. Отсюда получаем два утверждения:

— вещественная частотная характеристика системы с дробно-рациональной передаточной функцией является четной функцией частоты;

— мнимая частотная характеристика системы с дробно-рациональной передаточной функцией является нечетной функцией частоты.

В пункте 4.3 будет доказано, что эти утверждения справедливы не только для систем с дробно-рациональными передаточными функциями.

На рис. 4.3 пунктирной линией показана АФХ рассмотренной системы при отрицательных частотах.

Рассмотрим примеры построения частотных характеристик линейных непрерывных систем.

#### **Пример 4.1**

Построить частотные характеристики идеального интегратора, модель которого имеет вид:

$$y(t) = k_1 \int_0^t x(t) dt.$$

Передаточная функция интегратора определяется выражением

$$W(p) = \frac{k_1}{p}.$$



Сделав подстановку  $p = j\omega$ , получаем:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{j\omega} = -j \frac{k_1}{\omega}. \quad (4.15)$$

Откуда следует, что вещественная частотная характеристика интегратора

$$P(\omega) = 0.$$

Мнимая частотная характеристика интегратора

$$Q(\omega) = -\frac{k_1}{\omega}.$$

Переходя в (4.15) к показательной форме функции комплексной переменной, получим:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (4.16)$$

Откуда следует, что АЧХ интегратора имеет вид:

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\omega}. \quad (4.17)$$

ФЧХ интегратора не зависит от частоты:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (4.18)$$

Графики АЧХ, ФЧХ и АФХ приведены на рис. 4.4. АФХ интегратора (см. рис. 4.4, в) совпадает при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  с отрицательной частью оси ординат.

#### Пример 4.2

Построить частотные характеристики идеального дифференциатора, модель которого имеет вид:

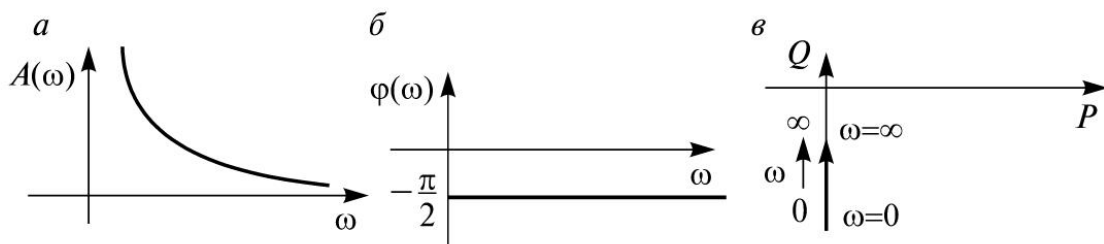


Рис. 4.4. АЧХ (а), ФЧХ (б) и АФХ (в) интегратора

$$y(t) = k \frac{dx}{dt}.$$

Передаточная функция дифференциатора определяется выражением

$$W(p) = kp.$$

Сделав подстановку  $p = j\omega$ , получим:

$$W(j\omega) = jk\omega. \quad (4.19)$$

Откуда следует, что вещественная частотная характеристика дифференциатора

$$P(\omega) = 0;$$

мнимая частотная характеристика

$$Q(\omega) = k\omega.$$

Переходя в (4.19) к показательной форме записи функции комплексной переменной, получим:

$$W(j\omega) = k\omega e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (4.20)$$

Откуда следует, что АЧХ дифференциатора имеет вид:

$$A(\omega) = k\omega. \quad (4.21)$$

ФЧХ дифференциатора не зависит от частоты:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.22)$$

Графики АЧХ, ФЧХ и АФХ приведены на рис. 4.5. АФХ дифференциатора (см. рис. 4.5, в) совпадает при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  с положительной частью оси ординат.

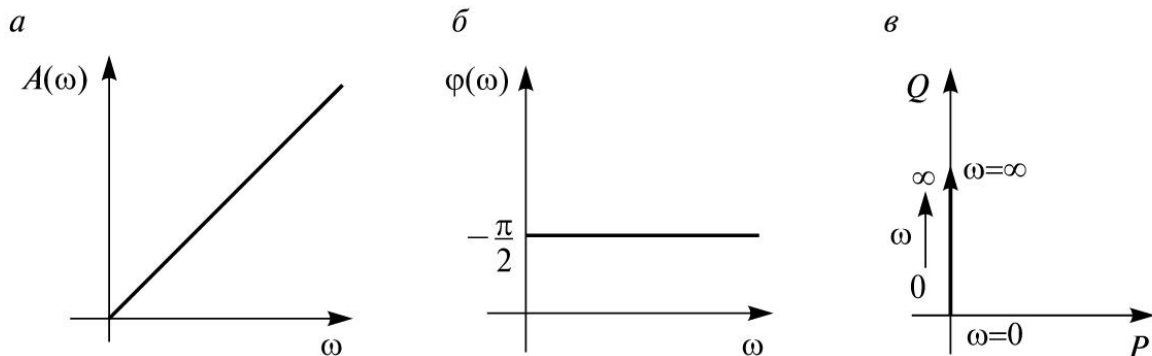


Рис. 4.5. АЧХ (а), ФЧХ (б) и АФХ (в) идеального дифференциатора

Частотная характеристика системы определяется выражением (4.9). Прологарифмируем это выражение:

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega).$$

Отсюда следует, что логарифм ЧХ равен функции комплексной переменной, действительная часть которой равна логарифму АЧХ, мнимая — ФЧХ.

Если по оси абсцисс откладывать значение частоты  $\omega$  в логарифмическом масштабе, а по оси ординат  $\ln A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , то получим соответственно логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики. Первая сокращенно записывается ЛАЧХ, вторая — ЛФЧХ [1].

Логарифмические характеристики в теорию автоматического управления пришли из акустики, где принято использовать десятичные логарифмы. Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики находят величину

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad (4.23)$$

где  $A(\omega)$  — АЧХ системы.

Величина  $L(\omega)$  выражается в децибелах. Пусть под знаком  $\lg$  находится отношение мощности сигнала на выходе системы к мощ-

ности сигнала на его входе:  $\lg \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}}$ . При десятикратном увеличении мощности сигнала эта величина имеет единицу измерения в 1 Бел. При стократном увеличении мощности сигнала логарифм отношения мощностей равен 2 Бела и т.д. Децибел равен одной десятой Бела.

Поэтому при использовании децибелов следует вычислять  $10 \lg \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}}$ .

Однако  $A(\omega)$  представляет отношение не мощностей, а выходной и входной величин. Примером таких величин может быть напряжение  $U$ , ток  $I$  и т.д. Мощность сигнала пропорциональна квадрату этих

величин. Тогда  $L(\omega) = 10 \lg \frac{kU_{\text{ВЫХ}}^2}{kU_{\text{ВХ}}^2} = 20 \lg \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$ , поэтому в выражении

(4.26) стоит множитель 20.

Рассмотрим, какому изменению амплитуды сигнала соответствует величина один децибел (1дБ):

$$1 \text{ дБ} = 20 \lg \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}.$$

Откуда

$$\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = 10^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{10}.$$

Итак, 1 дБ соответствует изменению амплитуды в  $\sqrt[20]{10}$  раз.

В рассмотренном случае выходная и входная координаты измерялись в одинаковых величинах (например, в вольтах). Вместе с тем сигналы на входе и выходе системы могут быть различной физической природы. Например, на входе системы — напряжение, измеряемое в вольтах, на выходе — перемещение, измеряемое в метрах. Тогда вводится некоторая базисная величина, соответствующая размерности передаточной функции и равная 1, например,  $x_0 = 1 \text{ м/В}$ . Под амплитудной частотной характеристикой в этом

случае будем понимать отношение  $\frac{1}{x_0} A(\omega)$ . По существу, использу-

ется условный прием, не изменяющий числовых результатов. Как уже указывалось выше, при построении логарифмических частотных характеристик по оси абсцисс откладывается величина  $\omega$  в логарифмическом масштабе. При этом также используют терминологию, принятую в акустике. Увеличение частоты вдвое называется увеличением частоты на *октаву*. Увеличение частоты в 10 раз называется увеличением частоты на *декаду*.

При использовании логарифмического масштаба существенным является вопрос о выборе начала координат по оси абсцисс, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \lg x = -\infty$ . По оси абсцисс минимальной выбирается такое

значение частоты, при котором от нее можно показать весь ход логарифмических частотных характеристик — это может быть величина 1, 0,1, 0,01 и т.д. рад/с. При построении ЛАЧХ величине 0 по оси ординат соответствует значение  $A(\omega) = 1$ , так как  $\lg 1 = 0$ .

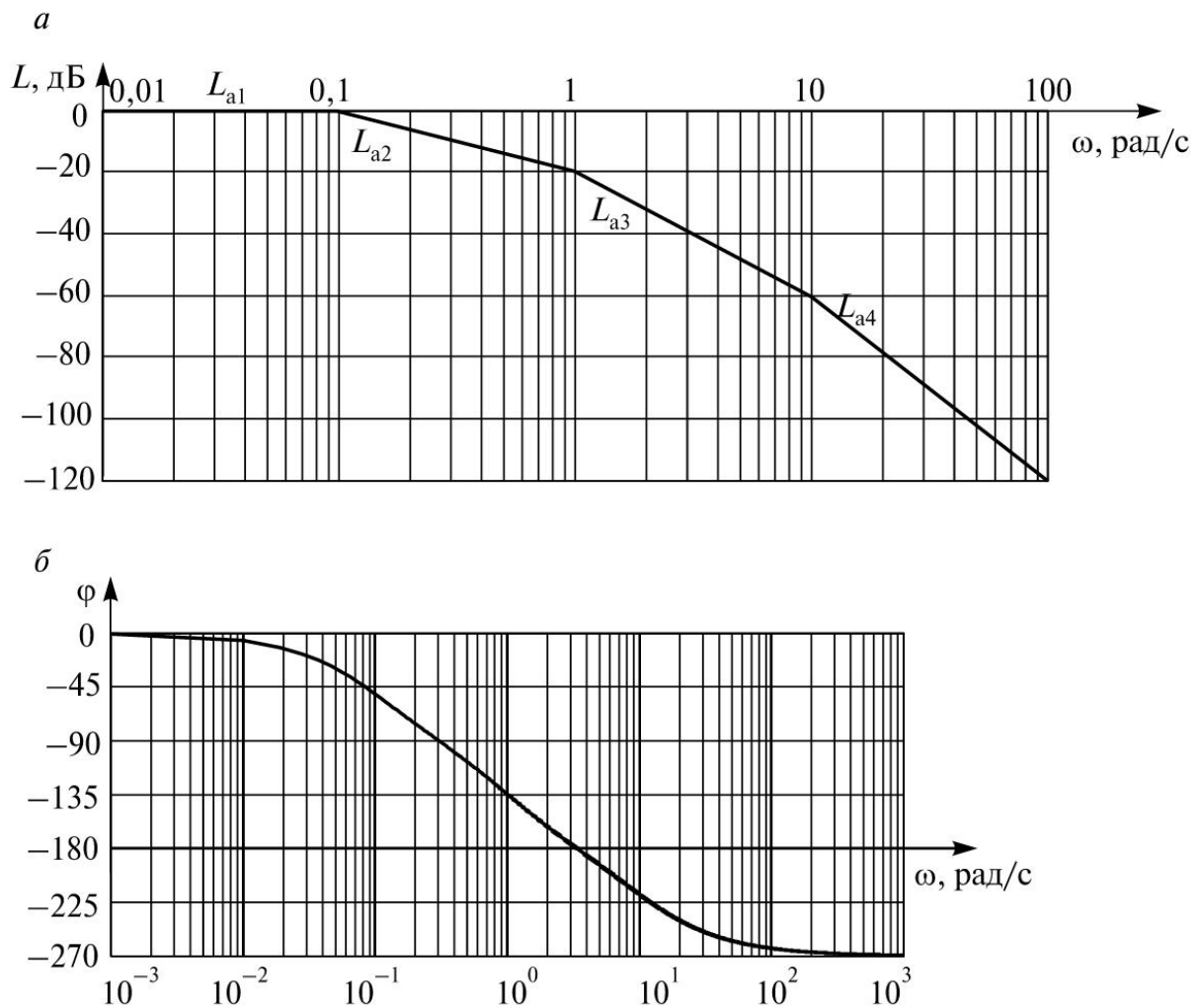


Рис. 4.6. ЛАЧХ (а) и ЛФЧХ (б) интегратора

При построении ЛФЧХ по оси ординат откладывается фаза в градусах в линейном масштабе, причем с осью абсцисс принято совмещать величину  $-180^\circ$ .

На рис. 4.6 приведены ЛАЧХ и ЛФЧХ для системы третьего порядка, АФХ которой представлена на рис. 4.3.

### 4.3. Связь частотных и временных характеристик

Передаточная функция является преобразованием Лапласа от импульсной характеристики  $k(t)$  (3.32), т.е.

$$W(p) = L[k(t)] = \int_0^{\infty} k(t)e^{-pt} dt.$$

Для физически реализуемых систем (см. главу 3) сигнал на выходе системы не может появиться раньше, чем сигнал на ее входе. Поэтому  $k(t) = 0$  при  $t < 0$ . При этих условиях можно записать:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (4.24)$$

т.е. выражение (4.24) определяет ЧХ как преобразование Фурье от импульсной характеристики. Следовательно, *частотная характеристика однозначно может быть получена путем использования преобразования Фурье от импульсной (весовой) характеристики* в соответствии с (4.24). Импульсная характеристика  $k(t)$  при известной  $W(j\omega)$  может быть получена путем использования обратного преобразования Фурье в соответствии со следующим выражением:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.25)$$

В данном случае интегрирование осуществляется при изменении частоты в диапазоне  $-\infty < \omega < \infty$ .

Дополнительно отметим, что условием использования преобразования Фурье является абсолютная интегрируемость оригинала, т.е.

$$\int_0^{\infty} k(t) dt = A.$$

Последнее справедливо для устойчивых систем автоматического управления (все полюса передаточной функции  $W(p)$  находятся в левой полуплоскости).

Покажем далее связь импульсной характеристики с вещественной  $\text{Re}[W(j\omega)] = P(\omega)$  и мнимой  $\text{Im}[W(j\omega)] = Q(\omega)$  частотными характеристиками. Подставив в (4.25)

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \text{ и } e^{j\omega t} = \cos \omega t + j\sin \omega t, \text{ получим:}$$

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) + jQ(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \sin \omega t d\omega + \right. \\
&\quad \left. + j \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \cos \omega t d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega \right].
\end{aligned}$$

Как показано ранее в п. 4.2,  $P(\omega)$  — четная функция  $\omega$ ,  $Q(\omega)$  — нечетная функция  $\omega$ . Учитывая четность функции  $\cos \omega t$  и нечетность  $\sin \omega t$ , получим, что второе и третье слагаемое предыдущего выражения равны 0 и

$$k(t) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (4.26)$$

Из условия физической реализуемости системы, т.е. из равенства нулю  $k(t)$  при отрицательном аргументе, получим:

$$0 = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Откуда

$$\frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Подставив полученное равенство в выражение (4.26), получим:

$$k(t) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (4.27)$$



или

$$k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (4.28)$$

Найдем далее связь между переходной функцией  $h(t)$  и частотными характеристиками системы. Так как

$$h(t) = \int_0^t k(t) dt,$$

то, подставив (4.27) в это выражение и меняя порядок интегрирования, получим:

$$h(t) = \int_0^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega \right] dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \left[ \int_0^t \cos \omega t dt \right] d\omega,$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (4.29)$$

Таким образом, выражения (4.27), (4.28) и (4.29) определяют связь между временными и частотными характеристиками системы.

Ранее для систем с дробно-рациональными передаточными функциями было доказано, что ЧХ при отрицательных частотах являются комплексно сопряженными ЧХ при положительных частотах. Используя (4.24), докажем этот факт в общем случае.

Подставив в (4.24), получим:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) (\cos \omega t + j \sin \omega t) dt = \int_0^{\infty} k(t) \cos \omega t dt + j \int_0^{\infty} k(t) \sin \omega t dt.$$

Изменим знак  $\omega$ . Учитывая четность функции  $\cos \omega t$  и нечетность  $\sin \omega t$ , получим:

$$W(-j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \int_0^{\infty} k(t) \cos \omega t dt - j \int_0^{\infty} k(t) \sin \omega t dt,$$

что и требовалось доказать.

---

## Глава 5. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОСВЯЗНЫХ, ЛИНЕЙНЫХ, НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 5.1. Структурные схемы и звенья динамических систем

В отличие от функциональных схем (см. гл. 2), которые поясняют принцип действия систем автоматического регулирования, структурные схемы дают представление о характере преобразования сигналов в системах как при статических (установившихся), так и при динамических (неустановившихся или переходных) процессах [1, 31, 32, 33, 34]. На основании структурных схем можно выполнить математическое описание процессов, протекающих в системе, и оценить ее основные свойства: устойчивость и качество регулирования. Структурные схемы позволяют графически изобразить взаимодействия, имеющиеся в сложных системах, что упрощает их исследование.

*Структурной называют такую схему, в которой каждой математической операции преобразования сигнала соответствует определенное динамическое звено.*

В отличие от элемента функциональной схемы динамическое звено не обязательно должно быть конструктивно обособленным устройством. Такими звеньями могут быть отдельные части элементов и объектов регулирования — обмотки возбуждения или якоря электрических машин, обмотки трансформаторов и т.п. Иногда могут вводиться динамические звенья, не связанные непосредственно с функциональными элементами, а лишь характеризующие математические зависимости между некоторыми координатами.

Если изменение входной координаты  $x$  звена приводит к изменению его выходной координаты  $y$ , а изменение  $y$  никак не сказывается на величине  $x$ , то такое звено называют звеном направленного действия. Свойство направленности обычно возникает при усиле-

нии входного сигнала по мощности. Пассивные звенья (рычаг, зубчатая передача, цепочки  $r$ ,  $L$ ,  $c$  и т.д.) свойством направленного действия не обладают.

Процесс преобразования сигналов в любой системе может быть описан с помощью передаточных функций  $W(p)$ , частотных  $W(j\omega)$  или импульсных  $k(t)$  характеристик. Поэтому считают, что каждому звену соответствуют определенные  $W(p)$ ,  $W(j\omega)$  или  $k(t)$ . Удобно с некоторыми приближениями свести всю совокупность динамических звеньев к ряду типовых, динамические свойства которых, выражаемые с помощью  $W(p)$ ,  $W(j\omega)$  и  $k(t)$ , хорошо изучены.

Используя структурную схему системы, можно определить для нее  $W(p)$ ,  $W(j\omega)$  или  $k(t)$ , исходя из соответствующих характеристик отдельных, входящих в эту схему динамических звеньев.

Динамические звенья подразделяют на три основных типа: позиционные, интегрирующие и дифференцирующие. Кроме того, различают неминимально-фазовые, неустойчивые и трансцендентные звенья, а также корректирующие, применяемые для улучшения динамических свойств САР. Подробное рассмотрение характеристик звеньев начнем с позиционных, к которым относятся безынерционное звено и инерционные звенья 1-го и 2-го порядков.

**Безынерционное (усилительное) звено.** Это звено описывают уравнением первого порядка:

$$A_0 y = B_0 x, \text{ или } y = kx, \quad (5.1)$$

где  $k = B_0/A_0$  — коэффициент усиления.

Примерами таких звеньев являются потенциометры, усилители, рычажные и зубчатые передачи. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = k. \quad (5.2)$$

Его частотные характеристики (рис. 5.1,  $a—z$ ):

$$W(j\omega) = k; A(\omega) = k; \varphi(\omega) = 0; L(\omega) = 20 \lg k. \quad (5.3)$$

Переходная функция (см. рис. 5.1,  $\partial$ ) имеет вид:

$$h(t) = k1(t). \quad (5.4)$$

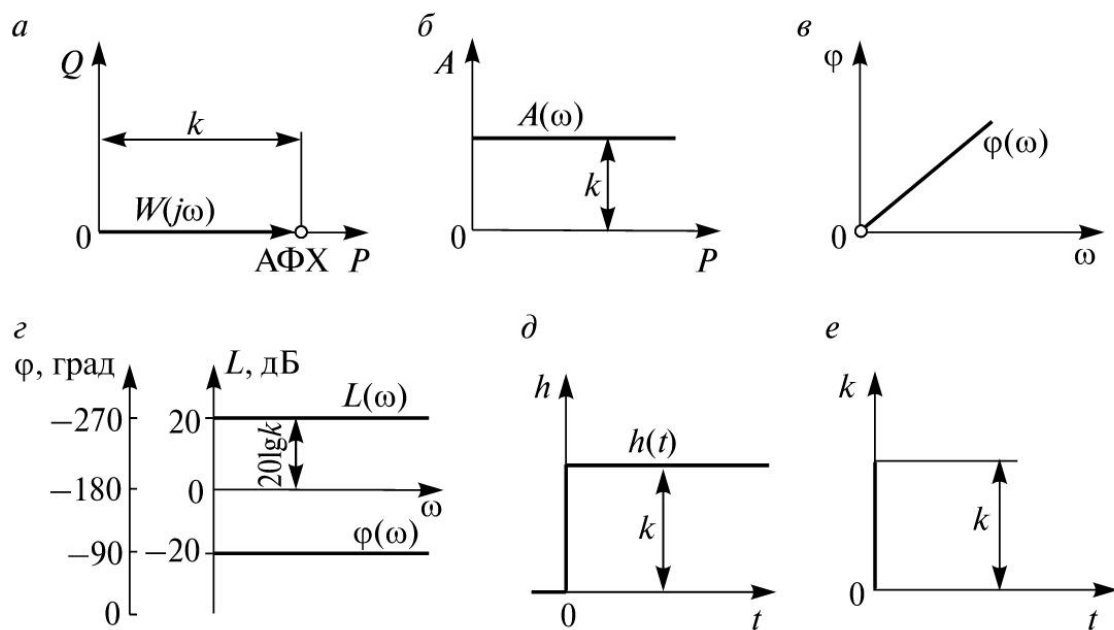


Рис. 5.1. Частотные (а—г) и временные (д, е) характеристики безынерционного усилительного звена

Импульсная (весовая) характеристика (см. рис. 5.1, е):

$$k(t) = k\delta(t). \quad (5.5)$$

На основе выполненного анализа частотных характеристик безынерционного звена можно сформулировать следующее физически очевидное утверждение: если амплитудно-частотная характеристика системы является прямой, параллельной оси частот и отстоящей от нее на величину  $k$ , а  $\varphi(\omega) = 0$ , то форма сигнала на выходе системы повторяет форму сигнала на ее входе и отличается только масштабом, определяемым коэффициентом усиления  $k$ .

В действительности безынерционных звеньев не существует, и такими звеньями считают те, у которых постоянная времени на один-два порядка ниже, чем у других звеньев системы.

**Инерционное (апериодическое) звено 1-го порядка.** Это звено описывают уравнением вида

$$A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = B_0 x \quad \text{или} \quad T \frac{dy}{dt} + y = kx, \quad (5.6)$$

где  $T = A_1/A_0$  — постоянная времени;  
 $k = B_0/A_0$  — коэффициент усиления.

Применив преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение звена в виде

$$(Tp + 1)y(p) = kx(p). \quad (5.7)$$

Откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{1 + Tp}. \quad (5.8)$$

Примеры такого звена — контуры  $rc$  или  $Lr$  (рис. 5.2). Составим уравнение для контура  $rc$  на основе второго закона Кирхгофа:

$$ri(p) + u_{\text{ВЫХ}}(p) = u_{\text{ВХ}}(p). \quad (5.9)$$

Здесь  $i(p)$  — ток, протекающий через емкость, при этом считают, что из-за высокого значения входного сопротивления следующего звена, выходной ток  $i_{\text{ВЫХ}}$  предыдущего звена мал и им можно пренебречь.

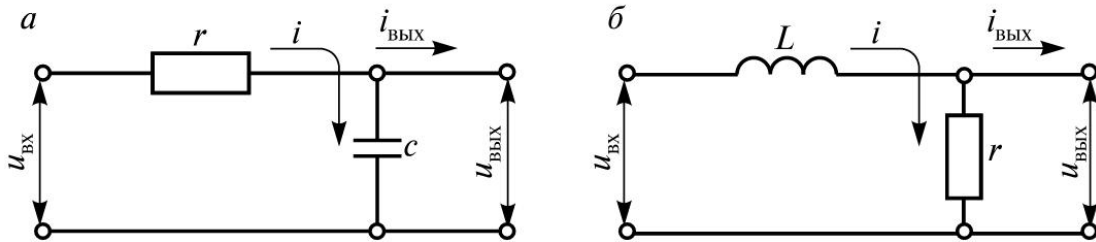


Рис. 5.2. Инерционные звенья первого порядка:  
а — контур  $rc$ ; б — контур  $rL$

Тогда  $i(p) = \frac{u_{\text{ВЫХ}}(p)}{1/cp} = cp u_{\text{ВЫХ}}(p)$  и уравнение (5.9) примет вид:

$(1 + rcp)u_{\text{ВЫХ}}(p) = u_{\text{ВХ}}(p)$ , что соответствует уравнению инерционного звена 1-го порядка при  $T = rc$  и  $k = 1$ .

Частотные характеристики звена (рис. 5.3, а—в) в алгебраической форме записи имеют вид:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{k}{1 + T^2\omega^2};$$

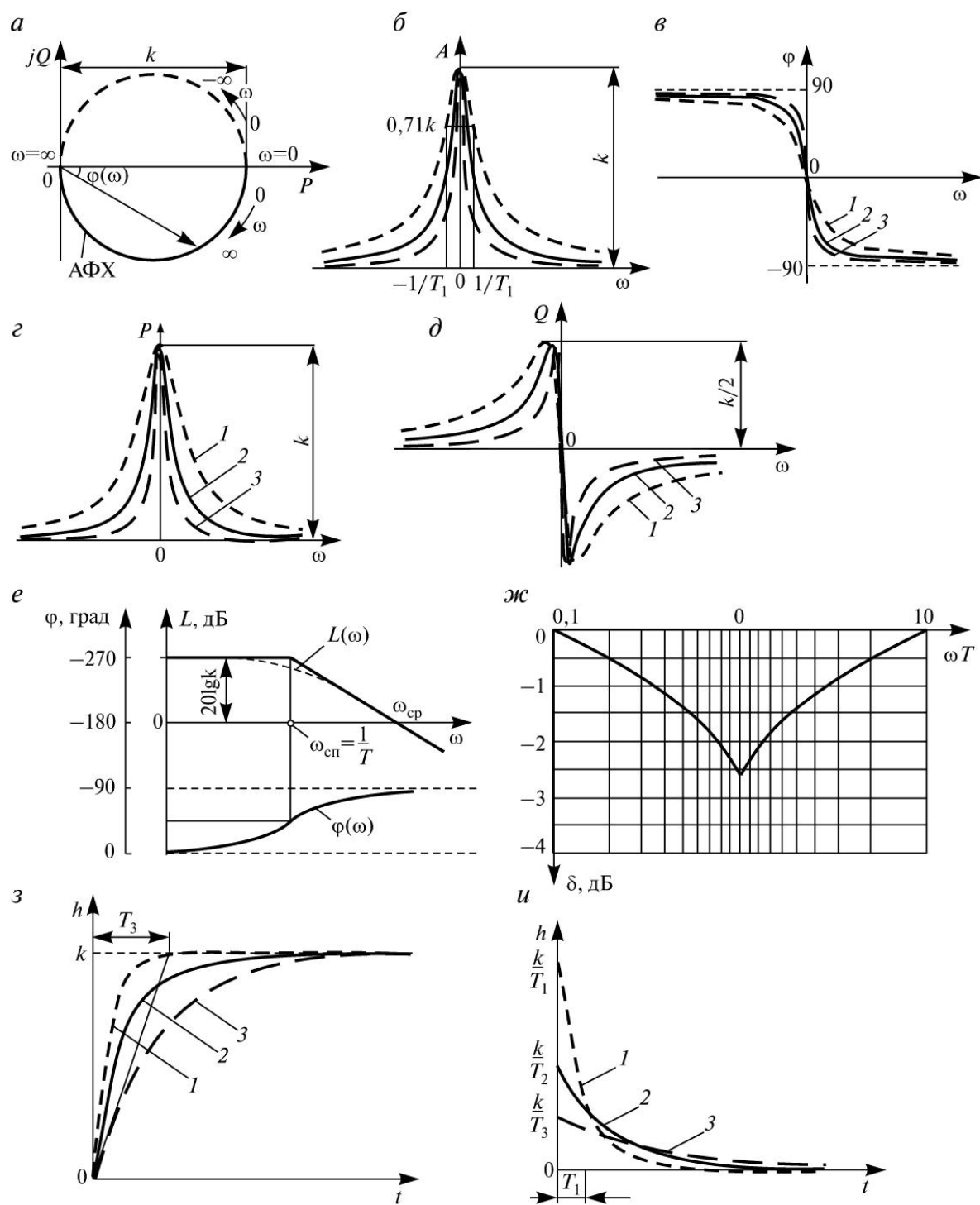


Рис. 5.3. Частотные (*a—ж*) и временные характеристики (*з, и*) инерционного звена 1-го порядка:  
*1* — при  $T = T_1$ ; *2* — при  $T = 2T_1$ ; *3* — при  $T = 4T_1$

$$P(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{k\omega T}{1+T^2\omega^2}. \quad (5.10)$$

ЧХ в показательной форме записи:

$$W(j\omega) = \sqrt{\left(\frac{k}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2} \exp\left\{j \arctg\left[\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2} \frac{1+T^2\omega^2}{k}\right]\right\};$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{j \arg(-T\omega)}.$$

В соответствии с этими выражениями АЧХ и ФЧХ можно записать в виде:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T. \quad (5.11)$$

АФХ рассматриваемого звена можно построить по выражениям (5.10) или (5.11), задаваясь значениями частоты и вычисляя соответствующие характеристики. Кроме того, для данного звена на основе (5.10) можно получить зависимость  $P(Q)$ , исключив частоту  $\omega$ . Действительно

$$P^2 + Q^2 = \frac{k^2}{(1+T^2\omega^2)^2} + \frac{k^2 T^2 \omega^2}{(1+T^2\omega^2)^2} = \frac{k^2}{1+T^2\omega^2}. \quad (5.12)$$

Учитывая выражение (5.10) для  $P(\omega)$ , запишем правую часть для (5.12) в виде

$$\frac{k^2}{1+T^2\omega^2} = kP.$$

Тогда

$$P^2 + Q^2 = kP \quad \text{или} \quad Q^2 + \left(P - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2. \quad (5.13)$$



Полученное уравнение представляет собой уравнение окружности радиуса  $0,5k$ , центр которой расположен на расстоянии  $0,5k$  от начала координат. Отметим также, что это выражение не зависит от постоянной времени  $T$ , и, следовательно, положение АФХ не будет изменяться при изменении  $T$ . Вместе с тем выражения для  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$ ,  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  содержат  $T$ , и, следовательно, вид этих характеристик будет изменяться при изменении  $T$  (см. рис. 5.3).

Таким образом, амплитудно-фазовой характеристикой этого звена (см. рис. 5.3, а) является полуокружность с диаметром, равным коэффициенту усиления  $k$ , расположенная при  $\omega > 0$  в квадранте IV, а при  $\omega < 0$  — в квадранте I. Вектор  $W(j\omega)$  при  $\omega = 0$  лежит на положительной вещественной полуоси, и при возрастании  $\omega$  угол  $\varphi(\omega) < 0$ . Так, при  $\omega = 1/T$ , имеем  $\varphi(1) = -45^\circ$ .

Из АЧХ звена (см. рис. 5.3, б) видно, что колебания с частотой  $\omega < T^{-1}$  звено пропускает без существенного снижения их амплитуды (0,71 наибольшего значения). Колебания с частотами  $\omega > T^{-1}$  звено сильно ослабляет — подавляет. Считают, что звено имеет полосу пропускания  $\Delta\omega = 2/T$ .

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (см. рис. 5.3, в, штриховая линия) имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2}. \quad (5.14)$$

Практически здесь применяют линейную аппроксимацию с помощью асимптотических ЛАЧХ  $L_a(\omega)$  (сплошная ломаная линия). При этом исходят из следующих допущений.

При низких частотах ( $\omega < \omega_{\text{сп}}$ , где  $\omega_{\text{сп}} = 1/T$  — сопрягающая частота) пренебрегают членом  $(\omega T)^2$  во втором слагаемом выражения (5.14), тогда  $L_a(\omega) \approx 20 \lg k$ . На рис. 5.3, в этому уравнению соответствует горизонтальная прямая, отстоящая на  $20 \lg k$  от оси частот.

При высоких частотах ( $\omega > \omega_{\text{сп}}$ ) пренебрегают единицей в подкоренном выражении второго слагаемого (5.14), тогда  $L_{a2}(\omega) \approx \approx 20 \lg k - 20 \lg \omega T$ . График этой асимптоты — прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек.

Разность между точной характеристикой  $L(\omega)$  и асимптотической  $L_a(\omega)$  представляет собой поправку  $\delta(\omega)$  к асимптотической характеристике (см. рис. 5.3, ж). Наибольшая погрешность, примерно рав-

ная  $-3$  дБ, соответствует сопрягающей частоте  $\omega_{\text{сп}}$ , когда  $\omega_{\text{сп}} T = 1$ . Точную ЛАЧХ никогда не строят, так как и при асимптотической аппроксимации точность получается обычно достаточной.

Переходная функция звена (см. рис. 5.3, з):

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{1 + Tp} \right\} = k \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{T} \right) \right] 1(t). \quad (5.15)$$

Импульсная (весовая) характеристика (см. рис. 5.3, и):

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} \exp \left( -\frac{t}{T} \right) 1(t). \quad (5.16)$$

**Инерционное звено 2-го порядка.** Это звено имеет уравнение

$$A_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = B_0 x. \quad (5.17)$$

Примеры такого звена — пассивный четырехполюсник, содержащий  $r$ ,  $L$ , и  $c$  (рис. 5.4, а), или колебательная система, состоящая из тела массой  $m$ , пружины с жесткостью  $\mathcal{K}$  и гидравлического гасителя с коэффициентом затухания  $\beta$  (рис. 5.4, б).

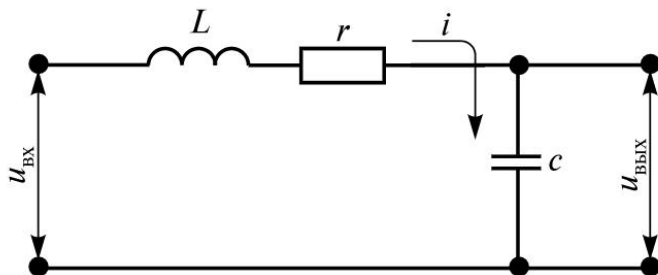
По второму закону Кирхгофа для цепи, приведенной на рис. 5.4, а,

$$L p i(p) + r i(p) + u_{\text{ВЫХ}}(p) = u_{\text{ВХ}}(p).$$

Так как  $i(p) = c p u_{\text{ВЫХ}}(p)$ , то  $(L c p^2 + r c p + 1) u_{\text{ВЫХ}}(p) = u_{\text{ВХ}}(p)$ .

Это уравнение соответствует уравнению (5.17) при  $A_0 = B_0 = 1$ .

а



б

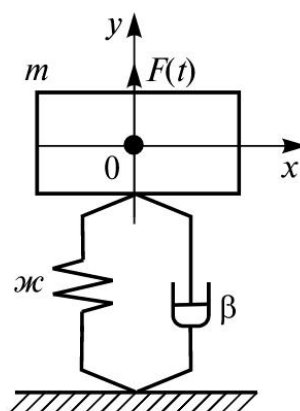


Рис. 5.4. Инерционные звенья 2-го порядка:  
а — электрическая  $rLC$  цепочка; б — механическая система

Уравнение механической системы (см. рис. 5.4, б) также соответствует уравнению (5.17):

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + \alpha y = F(t).$$

Введем следующие обозначения: коэффициент усиления  $k = B_0/A_0$ ; постоянные времени  $T_2 = \sqrt{A_2/A_0}$ ;  $T_1 = \sqrt{A_1/A_0}$  и  $T = \sqrt{A_2/A_0} = \sqrt{T_2^2}$ ; коэффициент относительного затухания (относительное демпфирование)  $n = A_1/(2\sqrt{A_2/A_0})$ ; собственная частота колебаний недемпфированного звена (звена без затухания)  $\omega_c = \sqrt{A_0/A_2}$ . С учетом этих обозначений уравнение (5.17) можно записать в виде:

дифференциальный

операторный

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx; \quad (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y(p) = kx(p); \quad (5.18)$$

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2nT \frac{dy}{dt} + y = kx; \quad (T^2 p^2 + 2nTp + 1)y(p) = kx(p); \quad (5.19)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n\omega_c \frac{dy}{dt} + \omega_c^2 y = k\omega_c^2 x; \quad (p^2 + 2n\omega_c p + \omega_c^2)y(p) = k\omega_c^2 x(p). \quad (5.20)$$

Для уравнения (5.18) характеристическое уравнение

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0. \quad (5.21)$$

Оно имеет корни

$$p_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}. \quad (5.22)$$

Соответственно для уравнения (5.20) характеристическое уравнение

$$p^2 + 2n\omega_c p + \omega_c^2 = 0 \quad (5.23)$$

имеет корни

$$p_{1,2} = -n\omega_c \pm \sqrt{n^2\omega_c^2 - \omega_c^2}. \quad (5.24)$$

Если в (5.24) обозначить степень затухания колебаний  $\alpha = n\omega_c$  и вынести  $\omega_c^2$  из-под знака радикала, получим:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}, \quad (5.25)$$

где  $\omega_{св} = \omega_c \sqrt{1-n^2}$  — собственная частота затухающих колебаний, т.е. собственная частота колебаний демпфированного звена (звена с затуханием).

Обычно  $n \ll 1$  и принимают  $\omega_{св} \approx \omega_c$ .

В зависимости от вида корней характеристических уравнений (5.22) и (5.24) инерционное звено 2-го порядка при  $T_1 > 2T_2$  или  $n > 1$  представляет собой апериодическое звено, при  $T_1 < 2T_2$  и  $n < 1$  — колебательное, а при  $T_1 = 0$  или  $n = 0$  — консервативное.

**Апериодическое звено 2-го порядка.** Это звено имеет следующую передаточную функцию, определяемую на основе уравнения (5.18):

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (5.26)$$

Корни характеристического уравнения (5.22) этого звена вещественные, поэтому их можно представить в виде  $p_1 = -1/T_3$  и  $p_2 = -1/T_4$ . Тогда, разложив полином  $N(p)$  знаменателя передаточной функции по корням, получим:

$$N(p) = T_2^2 (p - p_1)(p - p_2) = \frac{T_2^2}{T_3 T_4} (T_3 p + 1)(T_4 p + 1).$$

Поэтому

$$W(p) = \frac{k^*}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad (5.27)$$

где  $k^* = k T_3 T_4 / T_2^2$  — новое значение коэффициента усиления.

Из выражений (5.8) и (5.27) видно, что апериодическое звено 2-го порядка можно представить как два апериодических звена 1-го по-

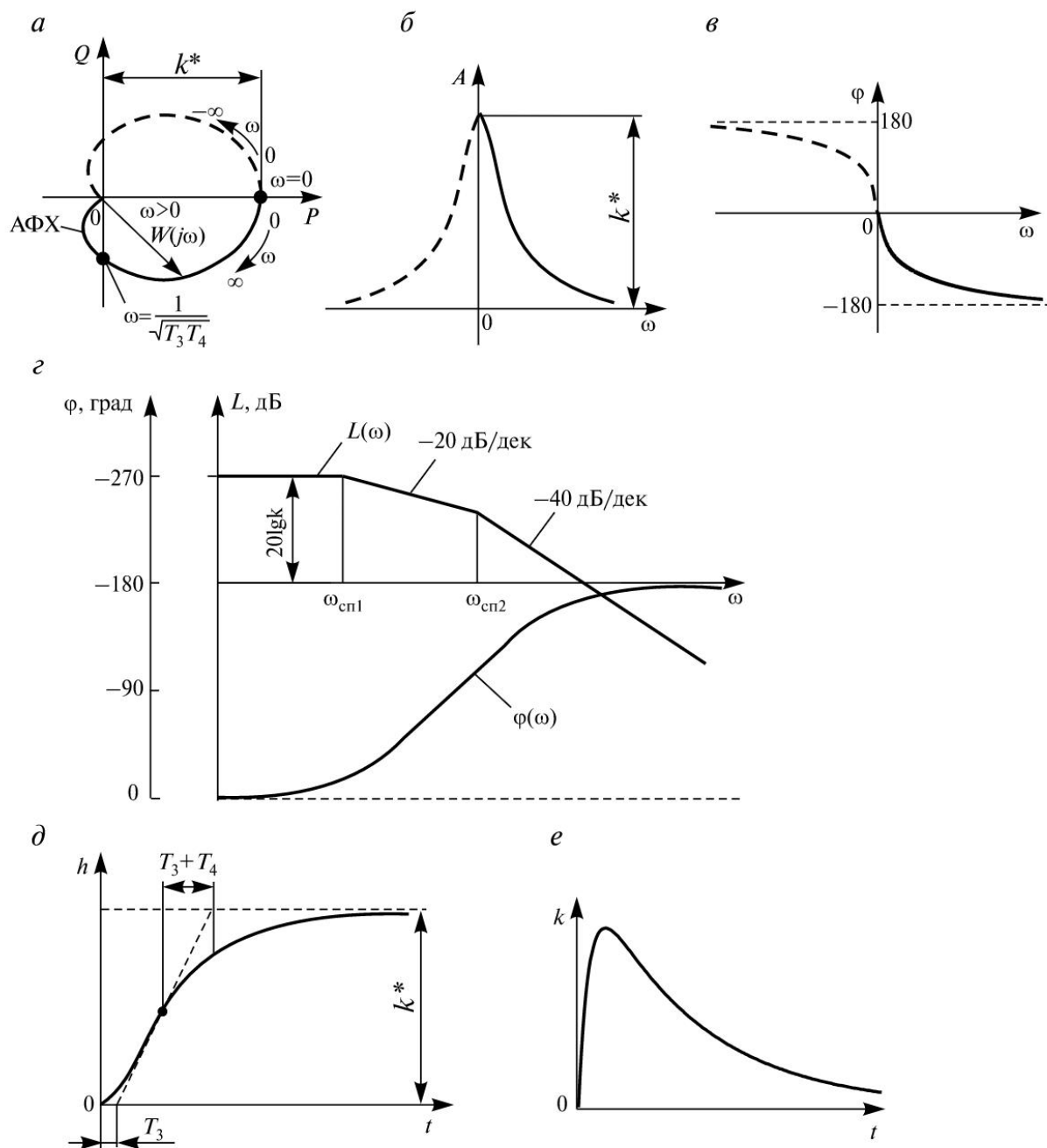


Рис. 5.5. Частотные (а—г) и временные (д, е) характеристики апериодического звена 2-го порядка

рядка. Частотные характеристики такого звена (рис. 5.5, а—в) описываются уравнениями:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T_2^2 + j\omega T_1} = \frac{k^*}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}; \quad (5.28)$$

$$A(\omega) = \frac{k^*}{\sqrt{(1 + \omega^2 T_3^2) \cdot (1 + \omega^2 T_4^2)}}; \quad (5.29)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4. \quad (5.30)$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg k^* - 20 \lg \sqrt{1 - \omega^2 T_3^2} - 20 \lg \sqrt{1 - \omega^2 T_4^2} \quad (5.31)$$

имеет две сопрягающие частоты  $\omega_{\text{сп1}} = 1/T_3$  и  $\omega_{\text{сп2}} = 1/T_4$ .

График  $L(\omega)$  можно аппроксимировать ломаной линией (см. рис. 5.5, з), состоящей из следующих отрезков: горизонтальной прямой, отстоящей от оси абсцисс на  $20 \lg k^*$  (на участке от  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_{\text{сп1}}$ ), прямой с наклоном  $-20$  дБ/дек (от  $\omega_{\text{сп1}}$  до  $\omega_{\text{сп2}}$ ) и прямой с наклоном  $-40$  дБ/дек (при  $\omega > \omega_{\text{сп2}}$ ).

Переходная функция апериодического звена 2-го порядка (см. рис. 5.5, д) имеет вид:

$$h(t) = k^* \left[ 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + \frac{T_3}{T_3 - T_4} \exp\left(-\frac{t}{T_4}\right) \right] 1(t). \quad (5.32)$$

Импульсная (весовая) характеристика (см. рис. 5.5, е) определяется уравнением

$$k(t) = \frac{k^*}{T_3 - T_4} \left[ \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \exp\left(-\frac{t}{T_4}\right) \right] 1(t). \quad (5.33)$$

**Колебательное звено.** Это звено имеет передаточную функцию, определяемую по уравнению (5.19):

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2nTp + 1}. \quad (5.34)$$

Частотные характеристики (рис. 5.6, а—в) описываются выражениями:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2 + j2n\omega T}; \quad (5.35)$$

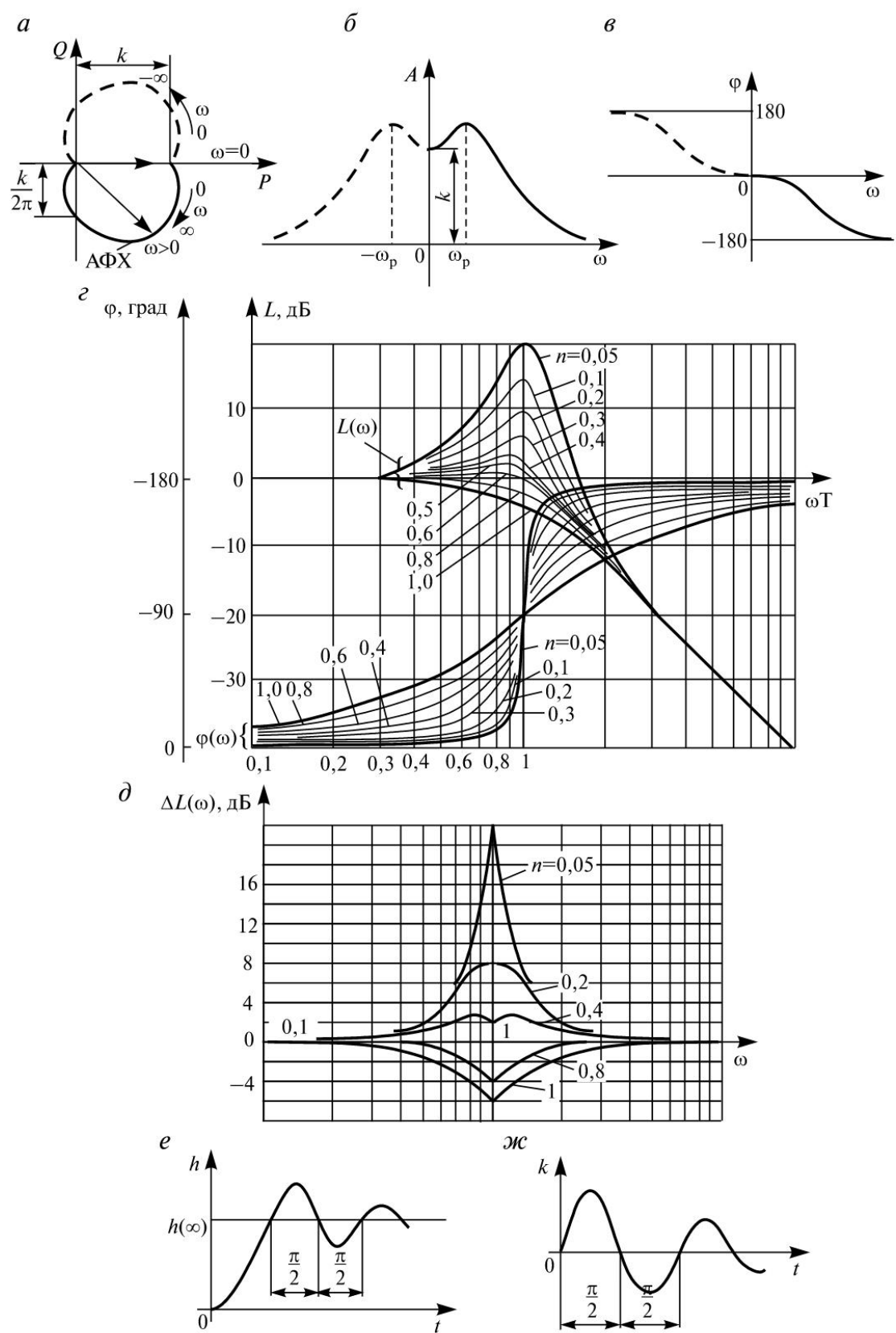


Рис. 5.6. Частотные (а—г) и временные (д, е) характеристики колебательного звена



$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2n\omega T)^2}}; \quad (5.36)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2n\omega T}{1 - \omega^2 T^2}. \quad (5.37)$$

Годограф АФХ пересекает мнимую ось на частоте  $\omega_{\text{сп}} = 1/T$ , при этом

$$W \left[ j \left( \omega_{\text{сп}} = \frac{1}{T} \right) \right] = \frac{k}{j \cdot 2n} = -j \frac{k}{2n}.$$

Амплитудная частотная характеристика имеет максимум при резонансной частоте  $\omega_p = \omega_c \sqrt{1 - 2n^2}$ , причем

$$A(\omega_p) = \frac{k}{2n\sqrt{1 - n^2}}.$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2n\omega T)^2}. \quad (5.38)$$

В пределах значений коэффициента относительного затухания  $0,4 \leq n \leq 0,7$  (рис. 5.6, *з*) ЛАЧХ можно аппроксимировать зависимостью  $L_a(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg \omega T$ .

Вне этого диапазона значений  $n$  линейная аппроксимация дает большие погрешности (более 3 дБ) и неприемлема; необходимо строить точное значение ЛАЧХ [1], для чего можно воспользоваться кривой поправок  $\Delta L(\omega)$  (см. рис. 5.6, *д*). При этом  $L(\omega) = L_a(\omega) + \Delta L(\omega)$ .

Временные характеристики колебательного звена (см. рис. 5.6, *е* и *ж*) определяются уравнениями:

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \varphi) \right] 1(t), \quad (5.39)$$

$$k(t) = k \frac{\omega_c^2}{\omega_{св}} e^{-\beta t} \sin \omega_{св} t \cdot 1(t), \quad (5.40)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \right). \quad (5.41)$$

**Консервативное звено.** Это — частный случай колебательного звена при  $n = 0$ , что соответствует отсутствию рассеяния энергии в звене. Частотные характеристики такого звена имеют разрыв при  $\omega_c = 1/T$ , а временные представляют собой незатухающие колебания с угловой частотой  $\omega_c$ .

**Звенья интегрирующего и дифференцирующего типа.** Характеристики звеньев интегрирующего (интегрирующего, интегрирующего с замедлением и изодромного) и дифференцирующего (дифференцирующего, дифференцирующего с замедлением и интегродифференцирующего) типов приведены в табл. 5.1.

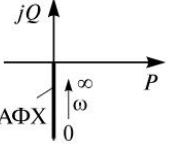
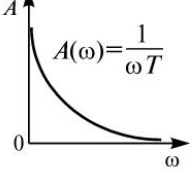
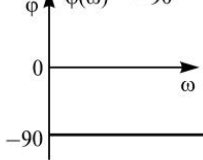
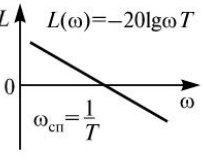
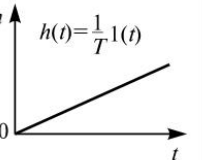
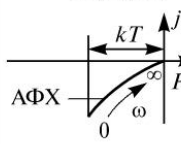
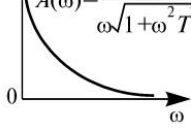
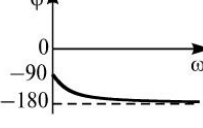
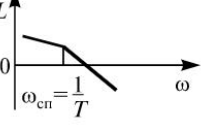
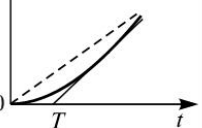
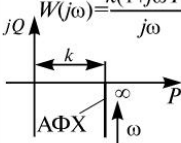
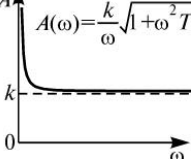
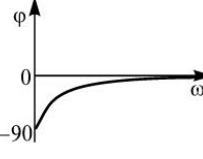
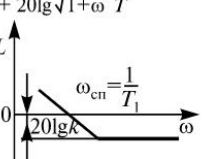
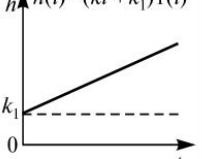
Часто эти звенья дополнительно вводят в состав САУ для придания ей определенных динамических свойств, или, как еще говорят, для коррекции системы. Такие корректирующие звенья могут по-разному вводиться в структурную схему САУ. Кроме рассмотренных звеньев к корректирующим относится еще целый ряд звеньев. Достаточно подробная таблица корректирующих звеньев будет приведена во второй части учебника.

**Неминимально-фазовые звенья.** Пусть передаточная функция системы представляет собой отношение двух полиномов. Система является устойчивой, когда корни характеристического полинома  $N(p)$  (полюса передаточной функции) лежат в левой полуплоскости (см. главу 3, п. 3.3). Кроме того, динамические свойства системы зависят от того, как расположены нули системы, т.е. корни полинома  $M(p)$ .

Если все нули передаточной функции устойчивой системы находятся в левой полуплоскости, то систему называют *минимально-фазовой*. В противном случае — *неминимально-фазовой*.

Известно, что для минимально-фазовых систем существуют следующие зависимости:

Таблица 5.1

Звено	Уравнение звена	Переда- точная функция	Характеристика				
			частотная	амплитудная частотная	фазовая час- тотная	логарифми- ческая ам- плитудная частотная	переходной функции
1	2	3	4	5	6	7	8
Интег- рирую- щее	$A_1 \frac{dy}{dt} = B_0 x; \quad \frac{dy}{dx} = kx;$ $y = \frac{1}{T} \int_0^t x dt;$ $k = \frac{1}{T} = \frac{B_0}{A_0}$	$W(p) = \frac{k}{p} = \frac{1}{Tp}$	$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{1}{j\omega T}$ 	 $A(\omega) = \frac{1}{\omega T}$	 $\varphi(\omega) = -90^\circ$	 $L(\omega) = -20 \lg \omega T$ $\omega_{cn} = \frac{1}{T}$	 $h(t) = \frac{1}{T} 1(t)$
Интег- рирую- щее с замед- лением	$A_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} = B_0 x;$ $T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kx;$ $k = \frac{B_0}{A_1}; \quad T = \frac{A_2}{A_1}$	$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}$	$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)}$ 	 $A(\omega) = \frac{k}{\omega \sqrt{1+\omega^2 T^2}}$	 $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T$	 $L(\omega) = -20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T^2}$ $\omega_{cn} = \frac{1}{T}$	 $h(t) = k[t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})] \times 1(t)$
Изо- дром- ное	$A_1 \frac{dy}{dt} = B_0 x + B_1 \frac{dx}{dt};$ $\frac{dy}{dt} = kx + k_1 \frac{dx}{dt};$ $k_1 = \frac{B_1}{A_1}; \quad k = \frac{B_0}{A_1}$	$W(p) = \frac{k}{p} + k_1;$ $W(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{p};$ $T_1 = \frac{k_1}{k} = \frac{B_1}{B_0}$	$W(j\omega) = \frac{k(1+j\omega T_1)}{j\omega}$ 	 $A(\omega) = \frac{k}{\omega} \sqrt{1+\omega^2 T_1^2}$	 $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1$	 $L(\omega) = -20 \lg k - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T_1^2}$ $\omega_{cn} = \frac{1}{T_1}$	 $h(t) = (kt + k_1) 1(t)$

1	2	3	4	5	6	7	8
Дифференцирующее	$A_0 y = B_1 \frac{dx}{dt};$ $y = T \frac{dx}{dt}; \quad T = \frac{B_1}{A_0}$	$W(p) = Tp$					$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0 \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases}$
Дифференцирующее с замедлением	$A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = B_1 \frac{dx}{dt};$ $T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{dx}{dt};$ $k = \frac{B_1}{A_0}; \quad T = \frac{A_1}{A_0}$	$W(p) = \frac{kp}{1+Tp}$					
Интегрирующее	$A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = B_0 x + B_1 \frac{dx}{dt};$ $T_2 \frac{dy}{dt} + y = k \left( T_1 \frac{dx}{dt} + x \right);$ $k = \frac{B_0}{A_0}; \quad T_1 = \frac{B_1}{B_0}; \quad T_2 = \frac{A_1}{A_0}$	$W(p) = \frac{k(1+T_1 p)}{1+T_2 p}$					

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(u)}{u - \omega} du;$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u)}{u - \omega} du;$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} \ln \operatorname{ctg} \left| \frac{\lambda}{2} \right| d\lambda,$$

где  $L(\lambda) = \ln A(\lambda)$ ,  $\lambda = \ln \frac{u}{\omega}$ ;

$u$  — переменная интегрирования;

$A(\lambda)$  — АЧХ системы при  $u = \lambda$ , а интегралы понимаются в смысле своих главных значений.

Из приведенных зависимостей следует, что ЧХ минимально-фазовой системы полностью определяется заданием ее вещественной  $P(\omega)$  или мнимой  $Q(\omega)$  частей или  $A(\omega)$ . Кроме того, из этих соотношений также следует, что в минимально-фазовых системах нельзя изменять АЧХ так, чтобы ФЧХ оставалась неизменной.

Для неминимально-фазовых систем приведенные соотношения не выполняются и, кроме того, сдвиг по фазе между входными и выходными сигналами может превышать  $\pi/2$ . В качестве примера неминимально-фазовой системы рассмотрим *устойчивое неминимально-фазовое звено первого порядка*. Дифференциальное уравнение этого звена имеет вид:

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = k \left( x - T_0 \frac{dx}{dt} \right). \quad (5.42)$$

Передаточная функция такого звена

$$W(p) = \frac{k(1 - T_0 p)}{T_1 p + 1} \quad (5.43)$$

и частотная характеристика имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega T_0)}{1 + j\omega T_1} = k \left[ \frac{1 - T_0 T_1 \omega^2}{1 + T_1^2 \omega^2} - j\omega \frac{T_1 + T_0}{1 + T_1^2 \omega^2} \right]. \quad (5.44)$$

Такое звено соответствует мостовым схемам, приведенным на рис. 5.7, а и б.

Работа этих схем может быть описана следующими уравнениями:

- для схемы а:  $rc \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 - r_0 c \frac{du_1}{dt}$ ;
- для схемы б:  $r_1 r_2 c \frac{du_2}{dt} + ru_2 = r_0 u_1 - r_1 r_2 c \frac{du_1}{dt}$ ,

где  $r = r_1 + r_2$ ;  $r_0 = r_2 - r_1$ ;  $r_2 > r_1$ .

Для схемы а:  $k = 1$ ;  $T_0 = r_0 c$ ;  $T_1 = rc$ ;  $\tau = T_0/T_1 < 1$ .

Для схемы б:  $k = \frac{r_0}{r} < 1$ ;  $T_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} c$ ;  $T_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} c$ ;  $\tau = T_0/T_1 > 1$ .

По выражению (5.43) для передаточной функции рассматриваемого звена найдем ее полюса и нули. Приравняв к нулю характеристический полином звена, получим характеристическое уравнение  $T_1 p + 1 = 0$ , откуда полюс звена равен:  $p_1 = -1/T_1$ , следовательно, звено устойчиво. Приравняв к нулю полином числителя (5.43), получим  $T_0 p - 1 = 0$ , откуда ноль звена равен  $p_0 = +1/T_0$ , следовательно, звено является неминимально-фазовым.

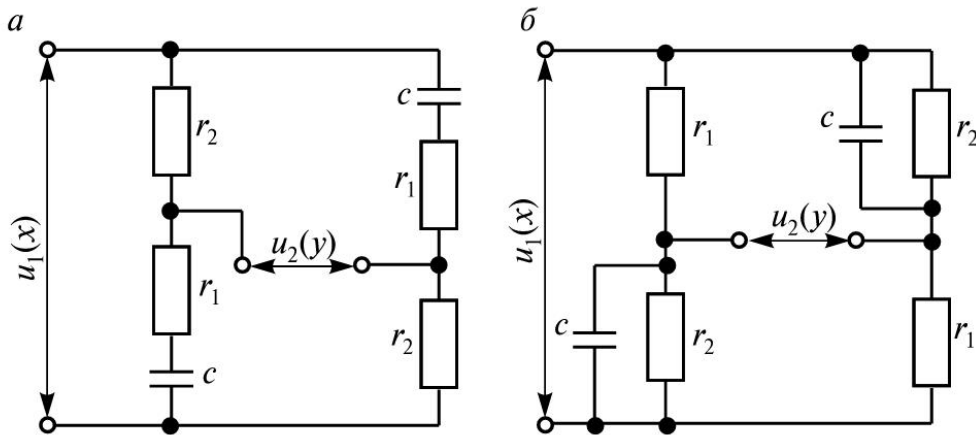


Рис. 5.7. Электрические схемы устойчивых неминимально-фазовых звеньев

Амлитудно-фазовые характеристики этого звена (рис. 5.8) имеют вид полуокружностей и расположены в третьем и четвертом квадрантах. На этом рисунке приведены нормированные АФХ:

$$W_0(j\Omega) = \frac{1}{k} W(j\omega), \quad \Omega = \omega T_1. \quad (5.45)$$

Амплитудная частотная характеристика этого звена совпадает с АЧХ интегро-дифференцирующего звена:

$$p_1 = \frac{1}{T}; p_{1,2} = \pm j\omega_x, \quad \text{где } \tau = T_0/T_1. \quad (5.46)$$

Также одинаковыми будут и их логарифмические амплитудные частотные характеристики.

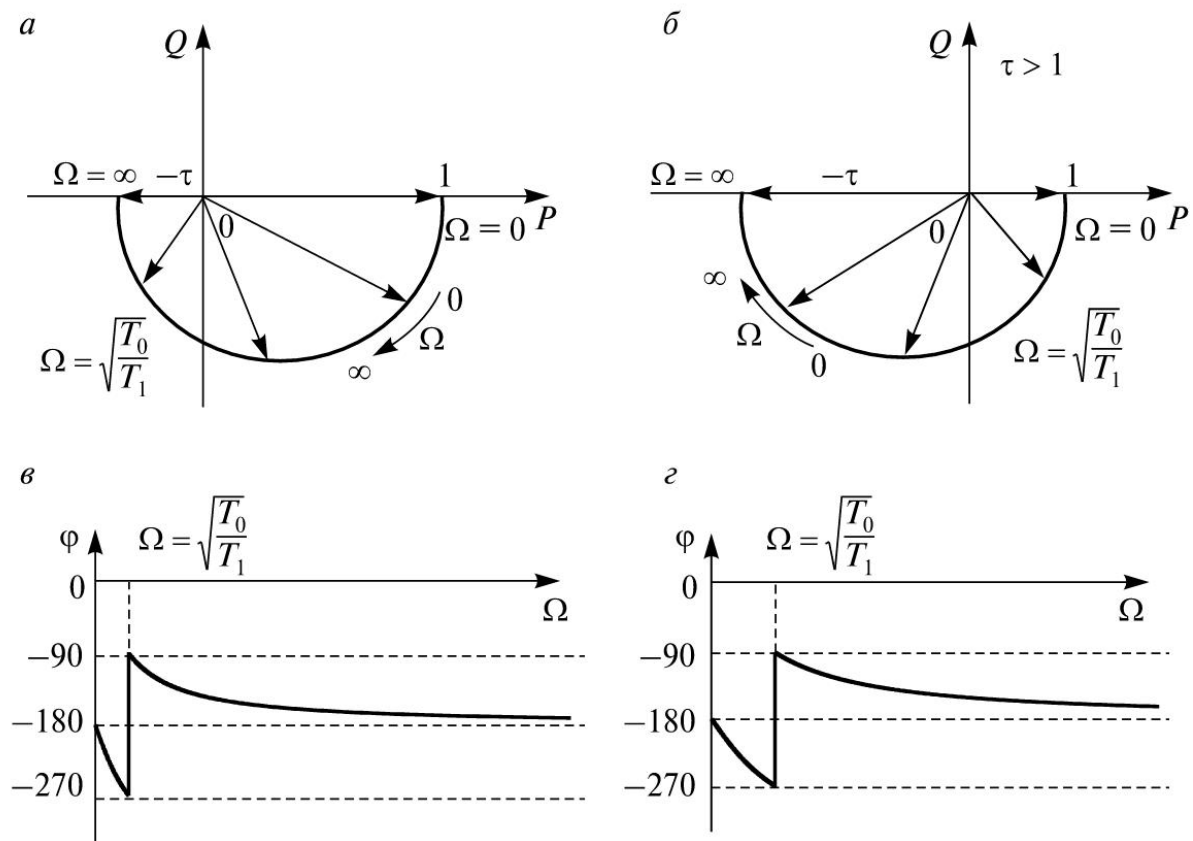


Рис. 5.8. Частотные характеристики неминимально-фазового звена:  
 а и в — соответственно амплитудно-фазовая и фазовая при  $\tau < 1$ ;  
 б и г — то же при  $\tau > 1$



ФЧХ этого звена определяется выражением:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg T_0 \omega - \arctg T_1 \omega & \text{при } \omega < (T_0 T_1)^{-0,5}; \\ -0,5\pi & \text{при } \omega = (T_0 T_1)^{-0,5}; \\ -\pi - \arctg T_0 \omega - \arctg T_1 \omega & \text{при } \omega > (T_0 T_1)^{-0,5}. \end{cases} \quad (5.47)$$

Графики этой характеристики в функции нормированной частоты  $\Omega = \omega T_1$  приведены на рис. 5.8 также для двух значений  $\tau$ . Эти графики существенно отличаются от ФЧХ минимально-фазового звена (интегро-дифференцирующего).

Таким образом, *при совпадении АЧХ минимально-фазовых и неминимально-фазовых звеньев их ФЧХ не совпадают*, с ростом частоты они не стремятся к нулю, а достигают значительных величин  $|\varphi(\infty)| \geq \frac{\pi}{2}$ . Эту особенность неминимально-фазовых звеньев необходимо иметь в виду при определении ФЧХ по известной АЧХ.

Временными характеристиками звена являются:

$$h(t) = k \left[ 1 - (1 + \tau) e^{-\frac{t}{T_1}} \right] 1(t);$$

$$k(t) = -k\tau\delta(t) + \frac{1 + \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} 1(t). \quad (5.48)$$

Графики этих характеристик приведены на рис. 5.9. Из этих графиков видно, что в отличие от аналогичных характеристик минимально-фазовых звеньев,  $h(t)$  меняет знак. Кроме того, величина  $\tau$  не оказывает существенного влияния на вид временных характеристик.

**Неустойчивые звенья.** В главе 4, п. 4.1 было введено понятие частотных характеристик как на физическом, так и на математическом уровне. При этом считалось, что при гармоническом входном сигнале переходные процессы в системе затухают, и на выходе линейной системы в установившемся режиме гармонический сигнал имеет ту же частоту, что и на входе. Сигналы на входе и выходе отлича-

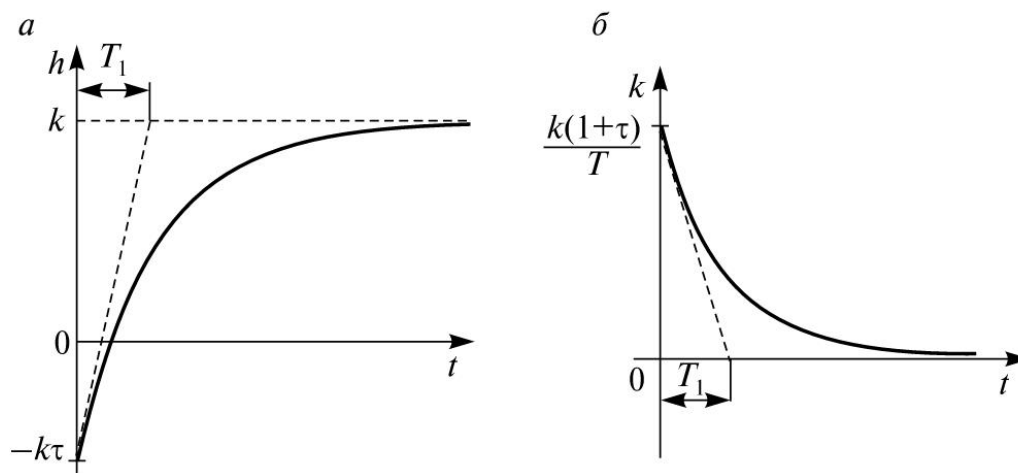


Рис. 5.9. Временные характеристики неминимально-фазового звена:  $a$  — переходная функция;  $b$  — импульсная характеристика

ются по амплитуде и имеют различные фазы. Эти рассуждения справедливы для физически реализуемых устойчивых систем. Напомним, что полюса передаточной функции этих систем лежат в левой полуплоскости.

Для идеального интегрирующего звена при гармоническом сигнале на входе имеем гармонический сигнал на выходе (см. п. 4.1, пример 4.1). Следовательно, несмотря на то что полюс передаточной функции интегрирующего звена находится в точке начала координат  $p = 0$ , т.е. звено нейтрально (см. главу 3, п. 3.3), понятие частотной характеристики совпадает с введенным в примере 4.1 понятием частотной характеристики интегрирующего звена.

В общем случае рассматривались физически реализуемые системы, у которых степень полинома числителя передаточной функции не превышает степени полинома знаменателя. К таким системам не относится идеальное дифференцирующее звено. Вместе с тем производная от гармонического сигнала также является гармоническим сигналом, и понятие частотной характеристики совпадает с введенным. В примере 4.2 были построены частотные характеристики идеального дифференцирующего звена.

Неустойчивые звенья описываются дифференциальными уравнениями с отрицательными коэффициентами в правой части и, следовательно, с положительными полюсами (корнями характеристического полинома). Сигнал на выходе такого звена не имеет установившегося значения.

Наиболее распространенным примером неустойчивого звена является квазиинерционное звено 1-го порядка, дифференциальное уравнение которого имеет вид:

$$y - T \frac{dy}{dt} = kx, \text{ или} \quad (5.49)$$

$$T \frac{dy}{dt} - y = kx. \quad (5.50)$$

Передаточная функция такого звена

$$W(p) = \frac{k}{1 - Tp} \text{ или } W(p) = \frac{k}{Tp - 1}. \quad (5.51)$$

Полюс передаточной функции, получаемый из уравнения  $Tp - 1 = 0$ , равен  $p_1 = \frac{1}{T}$  и лежит в правой полуплоскости. Следовательно, звено, описываемое этой передаточной функцией, неустойчиво.

Если на вход такого звена подать гармонический сигнал  $x(p) = x_0 \sin \omega_x t$ , имеющий изображение  $x(p) = x_0 \frac{\omega_x}{p^2 + \omega_x^2}$ , то изображение сигнала на выходе примет вид:

$$y(p) = \frac{kx_0\omega_x}{(Tp - 1)(p^2 + \omega_x^2)}.$$

Для перехода к оригиналам по формуле обращения определим корни знаменателя изображения  $y(p)$ :

$$p_1 = \frac{1}{T}; \quad p_{1,2} = \pm j\omega_x.$$

После перехода к оригиналам получаем:

$$y(t) = \frac{k\omega_x T}{1 + \omega_x^2 T^2} x_0 e^{\frac{t}{T}} + \frac{k}{\sqrt{1 + \omega_x^2 T^2}} x_0 \sin(\omega_x t + \varphi),$$

где  $\varphi = \arctg(\omega_x T)$  и  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ .

Как следует из этого выражения, решение данного дифференциального уравнения содержит гармонический сигнал и не имеет установившегося режима. Поэтому физическая трактовка понятия частотной характеристики, введенная ранее, не правомочна. Вместе с тем рассмотрим несколько иной подход. Будем искать частное решение рассматриваемых дифференциальных уравнений при

$$x(t) = x_0 e^{j\omega_x t} \quad (5.52)$$

в виде

$$y(t) = y_0 e^{j(\omega_x t + \varphi)}. \quad (5.53)$$

После подстановки (5.52) и (5.53), например, в (5.50) получаем:

$$y_0 T j \omega_x e^{j(\omega_x t + \varphi)} - y_0 e^{j(\omega_x t + \varphi)} = k x_0 e^{j\omega_x t}.$$

$$\text{Откуда } \frac{y_0}{x_0} e^{j\varphi} = \frac{k}{T j \omega - 1}.$$

Из этого выражения формально можно записать:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T j \omega - 1} = -\frac{k}{T^2 \omega^2 + 1} - j \frac{k T \omega}{T^2 \omega^2 + 1}; \quad (5.54)$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}; \quad (5.55)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi + \arctg(\omega T). \quad (5.56)$$

Полученные выражения (5.54), (5.55) и (5.56) определяют соответственно ЧХ, АЧХ и ФЧХ неустойчивой системы.

Обобщим полученный результат. После чего опять вернемся к этому примеру.

Пусть дифференциальное уравнение, являющееся моделью системы (требование устойчивости системы опускается), имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{i=m} A_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{k=0}^{k=n} B_k \frac{d^k x}{dt^k}. \quad (5.57)$$

Будем искать частные решения этого уравнения при входном сигнале  $x(t) = x_0 e^{j\omega_x t}$  в виде  $y(t) = y_0 e^{j(\omega_x t + \varphi)}$ . Подставив эти функции в (5.57), получим:

$$y_0 e^{j(\omega_x t + \varphi)} \sum_{i=0}^{i=n} A_i (j\omega)^i = x_0 e^{j\omega_x t} \sum_{k=1}^{k=n} B_k (j\omega)^k.$$

Откуда

$$\frac{y_0}{x_0} e^{j\varphi} = \frac{\sum_{k=1}^n B_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^n A_i (j\omega)^i}. \quad (5.58)$$

Из этого выражения формально можно записать:

$$W(j\omega) = \frac{y_0}{x_0} e^{j\varphi} = W(p = j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (5.59)$$

Следовательно, с математической точки зрения частотные характеристики в общем случае можно получить из передаточной функции системы после замены  $p$  на  $j\omega$ .

Сравнив (5.55) с (5.11), видим, что АЧХ устойчивого и неустойчивого звена, описываемого дифференциальными уравнениями первого порядка, не отличаются. В то же время ФЧХ неустойчивого звена 1-го порядка при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , в отличие от устойчивого звена 1-го порядка, изменяется от  $-\pi$  до  $-\frac{\pi}{2}$ . Таким образом, и в случае неустойчивых линейных звеньев правомочен общий подход построения частотных характеристик.

Частотные характеристики неустойчивого звена первого порядка приведены на рис. 5.10. Как видно из рис. 5.10, а при  $\omega = 0$ ,  $W(j0) = -k$  (что следует и из (5.54)) и АФХ начинается из точки, лежащей на отрицательной вещественной полуоси, т.е. в третьем квадранте. При увеличении  $\omega$ , вектор ЧХ вращается против часовой стрелки и описывает полуокружность. Таким образом, АФХ неустойчивого

звена является зеркальным отображением АФХ типового инерционного звена относительно мнимой оси. Пунктирной линией на этом рисунке показана АФХ неустойчивого звена первого порядка при изменении  $\omega$  от 0 до  $-\infty$ .

АЧХ и ЛАЧХ имеют такие же выражения, как и для инерционного звена I порядка:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2},$$

поэтому графики этих характеристик для неустойчивого звена ничем не отличаются от аналогичных графиков типового инерционного звена 1-го порядка.

Вместе с тем ФЧХ неустойчивого звена существенно отличается от ФЧХ устойчивого. График этой характеристики (рис. 5.10, б), построенный по формуле (5.56), представляет собой зеркальное отображение ФЧХ устойчивого инерционного звена относительно прямой  $\varphi = -\pi/2$ .

Такие же выводы относительно вида АЧХ и ФЧХ можно сделать и для других вариантов неустойчивых звеньев.

Временные характеристики рассматриваемого звена определяются следующими формулами:

$$h(t) = k \left[ e^{\frac{t}{T}} - 1 \right] 1(t); \quad (5.60)$$

$$k(t) = \frac{k}{T} e^{\frac{t}{T}} 1(t). \quad (5.61)$$

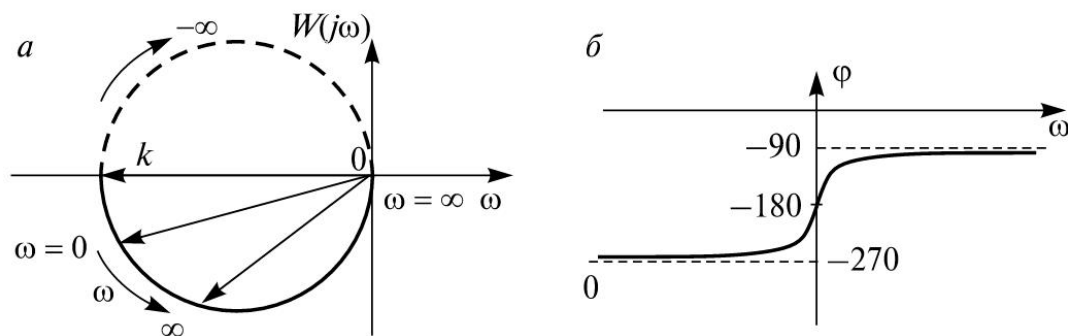


Рис. 5.10. Амплитудно-фазовая (а) и фазовая частотная характеристики (б) неустойчивого квазиинерционного звена 1-го порядка

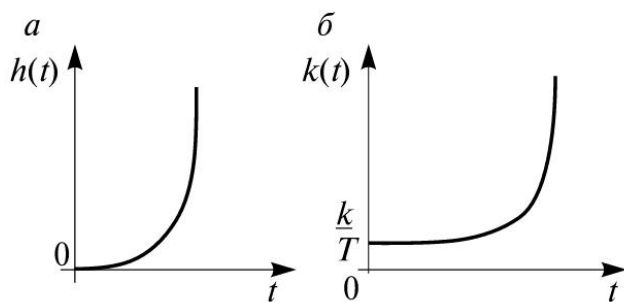


Рис. 5.11. Временные характеристики неустойчивого квазиинерционного звена 1-го порядка:

$a$  — переходная функция;  $b$  — импульсная характеристика

Эти выражения, а также их графики (рис. 5.11) свидетельствуют о том, что для неустойчивых звеньев не существует установившегося режима работы. С течением времени при любом значении воздействия реакция таких звеньев неограниченно возрастает.

### Трансцендентные звенья.

К ним относятся звенья, описываемые трансцендентными уравнениями. Простейшим примером таких звеньев является звено запаздывания, у которого реакция изменяется с отставанием на определенную постоянную величину от воздействия. Так, например, если воздействием является скачкообразный сигнал  $x(t) = x_0 1(t)$ , а реакция звена определяется выражением  $y(t) = x_0 1(t - \tau)$ , то такое звено является звеном запаздывания.

Явление запаздывания возникает, например, в системах передачи информации по линиям связи, при передаче кинематического возмущения через колесные пары подвижного состава и т.п.

Для определения передаточной функции звена запаздывания запишем приведенные выражения воздействия и реакции в операторной форме:

$$x(p) = \frac{x_0}{p} \quad \text{и} \quad y(p) = \frac{x_0}{p} e^{p\tau}.$$

Тогда

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = e^{p\tau} \quad (5.62)$$

и ЧХ определится выражением

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}. \quad (5.63)$$

АФХ такого звена представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 5.12). Окружность пересекает вещественную ось в точке  $+1$  при  $\omega = 2\pi n/\tau$  и в точке  $-1$  при



$\omega = \pi(2n + 1)/\tau$ , где  $n = 0, 1, \dots$ . Амплитудная и фазовая частотные характеристики определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 1 \text{ и} \\ \varphi(\omega) &= -\omega\tau. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Из (5.64) следует, что АЧХ рассмотренной системы не зависит от частоты, а ФЧХ системы — линейная функция частоты.

Причем  $\operatorname{tg} \alpha = \tau$ , где  $\tau$  — время запаздывания. Следовательно, если АЧХ системы не зависит от частоты, а ФЧХ системы — линейная функция частоты, сигнал на выходе системы повторяет форму сигнала на ее входе, при этом выходной сигнал отличается только масштабом, определяемым коэффициентом усиления  $k$  и запаздыванием на величину  $\tau$ .

Временные характеристики определяются выражениями:

$$h(t) = 1(t - \tau); \quad k(t) = \delta(t - \tau). \quad (5.65)$$

Звено запаздывания является неминимально-фазовым, устойчивым звеном. Оно играет особую роль при рассмотрении импульсных систем.

В системах связи, когда величина запаздывания незначительна, используют следующую терминологию:

- если АЧХ не зависит от частоты, а ФЧХ является линейной функцией частоты (в том числе  $\varphi(\omega) = 0$ ), то в системе не происходит линейных искажений сигнала; зависимость АЧХ от частоты и нелинейность ФЧХ определяют линейные искажения сигнала;
- если АЧХ не зависит от частоты, а ФЧХ нелинейно зависит от частоты, то искажения называют фазовыми;
- если АЧХ зависит от частоты, а ФЧХ — линейная функция частоты, то искажения называют амплитудными.

В инерционных системах в общем случае имеют место оба вида искажений сигнала.

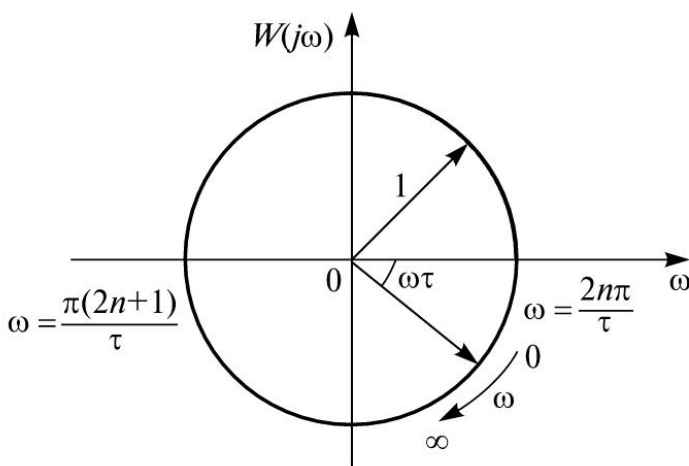


Рис. 5.12. Амплитудно-фазовая характеристика звена запаздывания

## 5.2. Правила изображения и преобразования структурных схем

В системах автоматического управления можно встретить различные соединения динамических звеньев [1], которым соответствуют определенные уравнения и структурные схемы. Графические обозначения, принятые в этих системах, приведены на рис. 5.13. Каждую структурную схему можно заменить эквивалентным звеном с передаточной функцией  $W_{\Sigma}(p)$ , т.е. одним звеном, которое по своим динамическим свойствам соответствует рассматриваемой схеме. Основные правила изображения структурных схем и их преобразования приведены в табл. 5.2.

В этой таблице п. 1 соответствует случаю, когда выходная координата  $y$  зависит от суммы двух входных координат  $x_1$  и  $x_2$ , а п. 2 — случаю, когда входные сигналы  $x_1$  и  $x_2$  суммируются после преобразования в звеньях  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$ . При параллельном соединении звеньев (п. 3) один и тот же сигнал  $x$  поступает на вход каждого из них, а выходные координаты суммируются. Поэтому такую схему соединения звеньев можно описать следующим выражением:

$$y(p) = W_1(p)x(p) + W_2(p)x(p) + \dots = x(p) \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

Отсюда эквивалентная передаточная функция для схемы параллельно-включенных звеньев равна:

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

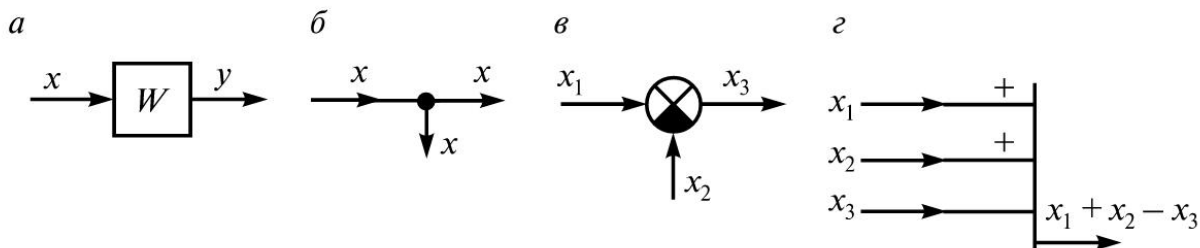
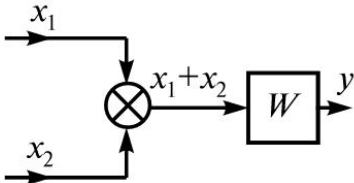
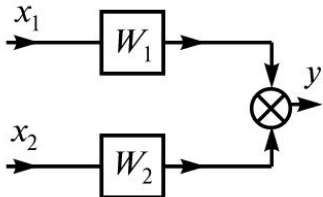
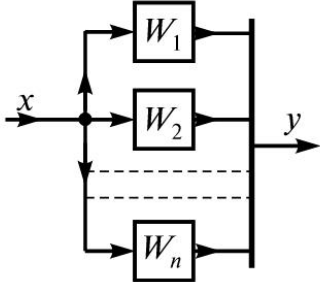
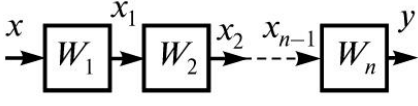
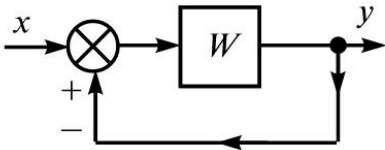
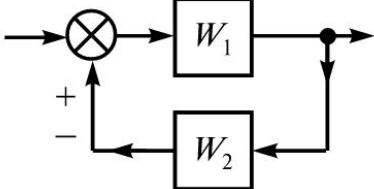


Рис. 5.13. Графические изображения звена (а), узла разветвления (б) и устройств сравнения (в, г)

Таблица 5.2

№ п/п	Уравнение динамической системы	Графическое изображение системы	Эквивалентная передаточная функция динамической системы
1	$y(p) = W(p) \cdot [(x_1(p) + x_2(p))]$		—
2	$y(p) = W_1(p) \cdot x_1(p) + W_2(p) \cdot x_2(p)$		—
3	$y(p) = x(p) \sum_{i=1}^n W_i(p)$		$W_{\Sigma}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$
4	$y(p) = x(p) \prod_{i=1}^n W_i(p)$		$W_{\Sigma}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$
5	$y(p) = W(p) [(x(p) \pm \pm y(p))]$		$W_{\Sigma}(p) = \frac{W(p)}{1 \mp W(p)}$
6	$y(p) = W_1(p) [(x(p) \pm \pm W_2(p)(y)p)]$		$W_{\Sigma}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p) W_2(p)}$

При последовательном соединении звеньев (п. 4) на вход каждого последующего звена поступает выходная координата предыдущего. Поэтому такая схема соответствует уравнениям:

$$x_1(p) = W_1(p)x(p); \quad x_2(p) = W_2(p)x_1(p) = W_2(p)W_1(p)x(p); \quad \dots;$$

$$y(p) = W_n(p)x_{n-1}(p) = W_n(p) \dots W_2(p)W_1(p)x(p) = x(p) \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Откуда эквивалентная передаточная функция для схемы последовательно включенных звеньев равна:

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Включению обратной связи при наличии в этой цепи звена с единичной передаточной функцией соответствует п. 5, а при наличии звена с передаточной функцией  $W_2(p)$  — п. 6. Знак плюс в уравнениях относится к положительной обратной связи (соответствует усилению входного сигнала), а знак минус — к отрицательной. В формулах передаточной функции эквивалентного звена эти знаки меняются на обратные. Выведем для примера формулу эквивалентной передаточной функции для п. 6. Уравнение, описывающее эту схему, запишем в виде

$$y(p) = W_1(p)[x(p) \pm W_2(p)y(p)].$$

Перенеся в этом выражении слагаемые с  $y(p)$  в левую часть, запишем:

$$y(p)[1 \pm W_1(p)W_2(p)] = W_1(p)x(p).$$

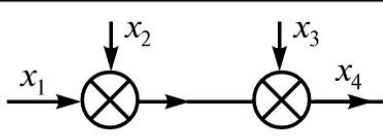
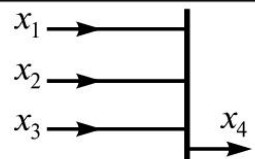
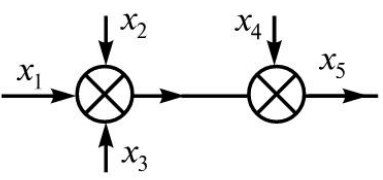
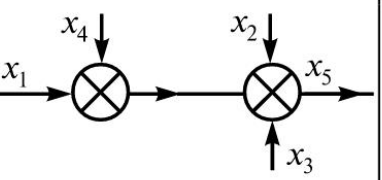
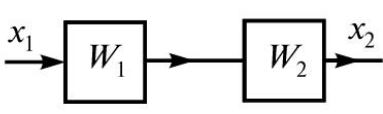
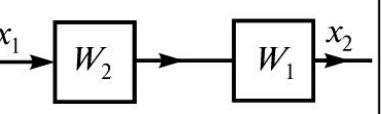
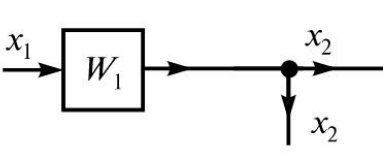
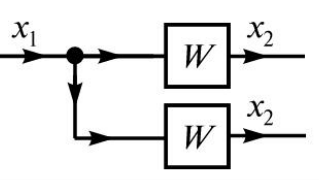
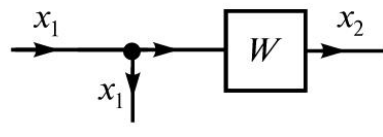
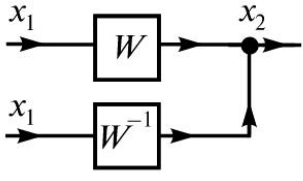
Отсюда эквивалентная передаточная функция звена, охваченного обратной связью, будет равна:

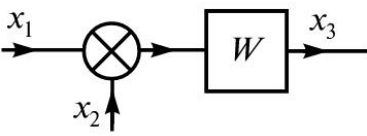
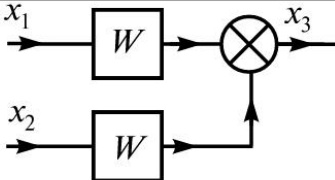
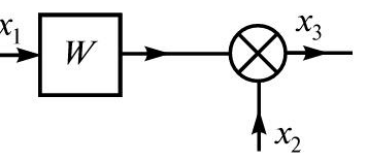
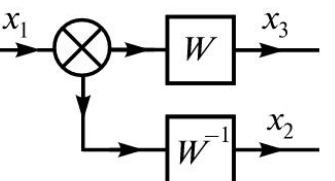
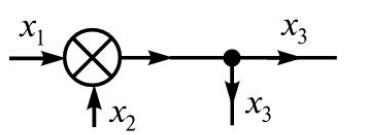
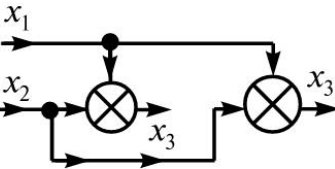
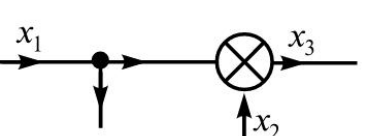
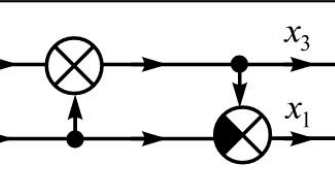
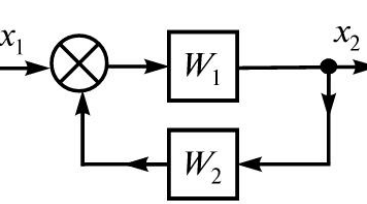
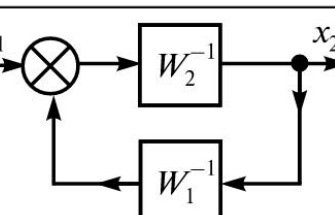
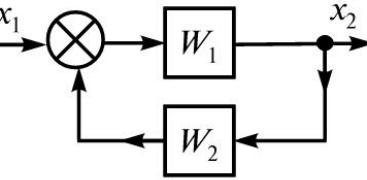
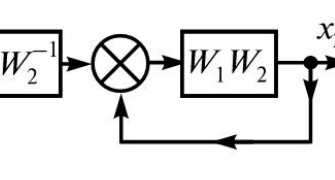
$$W_{\Sigma}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)}.$$

Из этой формулы легко перейти к формуле п. 5.

Определение эквивалентной передаточной функции сложных линейных систем значительно облегчается после предварительных преобразований структурной схемы. Правила таких преобразований, заключающихся в переносе звеньев, устройств сравнения и точек разветвления, приведены в табл. 5.3. Первые три правила, определяющие преобразования устройств сравнения и перестановку звеньев, элементарны и пояснений не требуют. При переносе точек разветвления с выхода звена на его вход (п. 4) и в обратном направлении (п. 5) следует иметь в виду, что выходная координата после точки разветвления не должна изменяться. Поэтому в п. 4 приходится вводить дополнительное звено с передаточной функцией  $W(p)$ , а в п. 5 —

Таблица 5.3

№ п/п	Наименование операции	Структурная схема	
		Исходная	Эквивалентная
1	2	3	4
1	Преобразование устройств сравнения		
2			
3	Перестановка звеньев		
4	Перенос точки разветвления с выхода на вход звена		
5	То же с входа на выход звена		

1	2	3	4
6	Перенос устройства сравнения с входа на выход звена		
7	То же с выхода на вход звена		
8	Перенос точки разветвления с выхода на вход устройства сравнения		
9	То же с входа на выход устройства сравнения		
10	Изменение места звеньев цепей прямой и обратной связи		
11	Переход к единичной обратной связи		

с передаточной функцией  $W^{-1}(p)$ . Аналогично приходится поступать и при переносе устройств сравнения с входа звена на его выход (п. 6) и в обратном направлении (п. 7).

Более сложными являются правила переноса точки разветвления с выхода на вход элемента сравнения (п. 8) и в обратном направлении (п. 9), но эти правила также обеспечивают неизменность выходных координат после преобразований. Последние два правила (п. 10 и 11) вытекают из предыдущих и специальных пояснений не требуют.

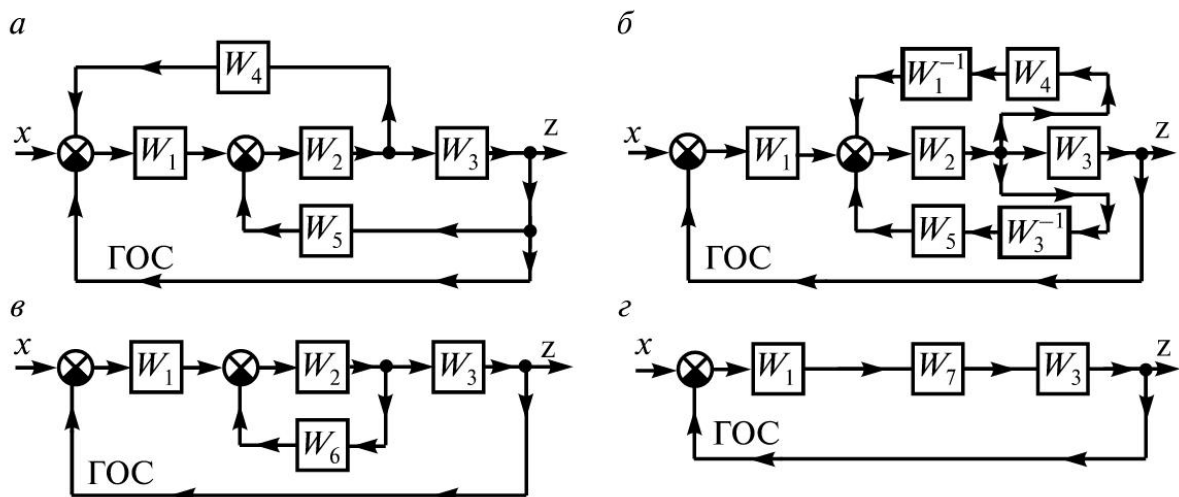


Рис. 5.14. Пример последовательного преобразования структурной схемы САР:  
 а — исходная структурная схема; б, в, з — этапы преобразования

Рассмотрим последовательное преобразование одной из характерных структурных схем (рис. 5.14, а), выполненное для получения ее эквивалентной передаточной функции. Эта схема содержит главную обратную связь (ГОС), с помощью которой с выхода системы регулирования на ее вход передается фактическое значение регулируемой величины. Объединим точки приложения местных обратных связей на входе и выходе звена  $W_2(p)$  (см. рис. 5.14, б). При этом в цепи положительной обратной связи окажутся звенья  $W_1^{-1}(p)$  и  $W_4(p)$ , а в цепи отрицательной связи — звенья  $W_5(p)$  и  $W_3^{-1}(p)$ .

Используя данные табл. 5.2, объединим все звенья цепей обратной связи в одно звено  $W_6(p)$  (см. рис. 5.14, в):

$$W_6(p) = -W_3^{-1}(p)W_5(p) + W_1^{-1}(p)W_4(p).$$

Далее заменим звено  $W_2(p)$ , охваченное обратной связью, эквивалентным звеном  $W_7(p)$  без обратной связи (см. рис. 5.14, з):

$$W_7(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_6(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) \left[ \frac{W_4(p)}{W_1(p)} - \frac{W_5(p)}{W_3(p)} \right]}.$$



Соответственно эквивалентная функция  $W_8(p)$  всей замкнутой системы:

$$W_8(p) = \frac{W_1(p)W_7(p)W_3(p)}{1 + W_1(p)W_7(p)W_3(p)} =$$

$$= \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p) \left[ \frac{W_4(p)}{W_1(p)} - \frac{W_5(p)}{W_3(p)} \right] + W_1(p)W_2(p)W_3(p)}.$$

Такой же результат можно было бы получить и путем непосредственного преобразования системы уравнений, соответствующей исходной структурной схеме. Однако применение метода преобразования структурных схем упрощает решение задачи и делает ее более наглядной.

### 5.3. Структурные схемы, передаточные функции и уравнения САУ

При составлении структурных схем САУ в качестве исходной информации используют, как правило, функциональную схему. При этом разделение функциональных элементов на звенья выполняют так, чтобы каждому звену соответствовала простейшая передаточная функция одного из типовых звеньев. Задающие и логические элементы на структурных схемах не показывают [1].

Структурные схемы могут быть одно- и многоконтурные (см. главу 2, п. 2.3). Кроме того, выделяют структурные схемы с перекрещивающимися обратными связями (см. рис. 5.14). В таких системах один из контуров обратной связи охватывает участок схемы, содержащей начало или конец другой цепи обратной связи. Структурные схемы многоконтурных САУ и САУ с перекрещивающимися обратными связями могут быть преобразованы по правилам (см. табл. 5.3) в схемы одноконтурных САУ с одной главной обратной связью.

Для описания динамических свойств САУ, приведенных к одноконтурному виду, используют передаточные функции разомкнутой  $W_p(p)$  и замкнутой  $W_z(p)$  систем, передаточные функции замкнутой системы по ошибке  $W_\Delta(p)$  и по возмущению  $W_q(p)$ , а также по ошибке относительно возмущения  $W_{\Delta q}(p)$ .

**Передаточная функция разомкнутой САУ.** Эта передаточная функция выражается отношением преобразования Лапласа реакции системы  $z(p)$  к преобразованию Лапласа сигнала ошибки (рассогласования)  $\Delta(p)$ :

$$W_p(p) = z(p) / \Delta(p). \quad (5.66)$$

Такая формулировка соответствует тому, что при размыкании цепи ГОС у сумматора входной координатой САУ будет ошибка  $\Delta(p)$  (рис. 5.15, а). Передаточная функция  $W_p(p)$  может быть вычислена по структурной схеме. При этом считается, что возмущение  $q = 0$ , а САУ после размыкания цепи ГОС состоит только из последовательно соединенных звеньев, поэтому

$$W_p(p) = \prod_{i=1}^r W_i(p), \quad (5.67)$$

где  $W_i(p) = M_i(p) / N_i(p)$  — передаточная функция каждого последовательного звена, которую можно представить отношением двух полиномов.

Таким образом,

$$W_p(p) = \prod_{i=1}^r \frac{M_i(p)}{N_i(p)} = \frac{E(p)}{F(p)}, \quad (5.68)$$

где  $E(p) = \prod_{i=1}^r M_i(p) = E_0 + E_1 p + E_2 p^2 + \dots + E_{m-1} p^{m-1} + E_m p^m$  — полином числителя передаточной функции разомкнутой САУ;

$$F(p) = \prod_{i=1}^r N_i(p) = F_0 + F_1 p + F_2 p^2 + \dots + F_{n-1} p^{n-1} + F_n p^n$$
 — полином знаменателя передаточной функции разомкнутой САУ.

Порядки  $m$  и  $n$  этих полиномов равны сумме порядков перемножаемых полиномов  $M_i(p)$  и  $N_i(p)$ . При этом для осуществимости системы должно выполняться условие:  $n > m$ . Уравнение  $F(p) = 0$  является характеристическим для разомкнутой САУ.

Передаточную функцию  $W_p(p)$  обычно записывают в стандартной форме, когда многочлены числителя и знаменателя имеют свободные члены, равные единице:

$$W_p(p) = \frac{k(e_m p^m + e_{m-1} p^{m-1} + \dots + e_1 p + 1)}{p^v (f_n p^n + f_{n-1} p^{n-1} + \dots + f_1 p + 1)}, \quad (5.69)$$

где  $k = E_0/F_0$  — коэффициент усиления разомкнутой САР.

В уравнении (5.69)  $e_i = E_i/F_0$  при  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ;  $f_i = F_i/F_0$  при  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , а величина  $n$  (порядок астатизма системы) соответствует количеству интегрирующих звеньев, включенных последовательно. При  $v = 0$  система статическая, при  $v = 1$  — астатическая 1-го порядка, при  $v = 2$  — астатическая 2-го порядка и т.д.

В установившемся режиме  $p \rightarrow 0$  и  $W_p(0) = k$ .

Если звенья системы типовые, то передаточная функция примет вид:

$$W_p(p) = \frac{k \prod_{u=1}^{\alpha} (T_u p + 1)}{p^v \prod_{r=1}^{\beta} (T_r p + 1) \prod_{s=1}^{\gamma} (T_s^2 p^2 + 2n_s T_s p + 1)}, \quad (5.70)$$

где  $\alpha$  — количество звеньев интегро-дифференцирующего и дифференцирующего типов;

$\beta$  —  $\alpha$  — количество инерционных звеньев 1-го порядка;

$\gamma$  — количество колебательных звеньев.

**Передаточная функция замкнутой системы.** Эта передаточная функция выражается отношением преобразования Лапласа реакции  $z(p)$  величины к преобразованию Лапласа задающего воздействия:

$$W_3(p) = z(p)/g(p). \quad (5.71)$$

При этом принимают, что  $q = 0$ , и структурную схему, приведенную на рис. 5.15, а, преобразовывают к виду, показанному на рис. 5.15, б, т.е. замкнутую САР можно рассматривать как разомкнутую, охваченную главной обратной связью ГОС. Тогда передаточная функция замкнутой САР

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}. \quad (5.72)$$

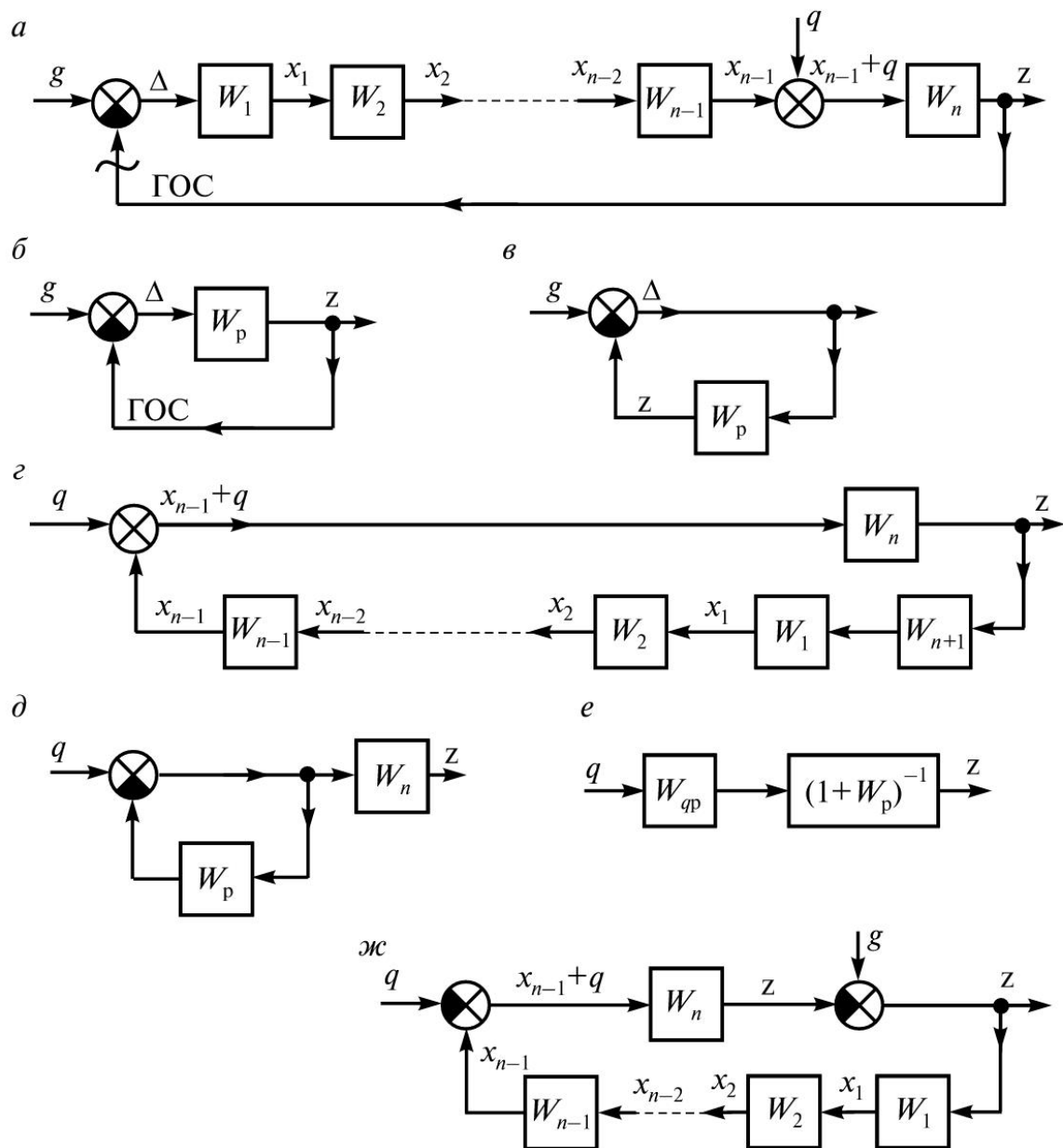


Рис. 5.15. Структурные схемы для определения передаточных функций системы

В соответствии с выражением (5.72)

$$W_3(p) = \frac{E(p)}{F(p) + E(p)} = \frac{E(p)}{D(p)}, \quad (5.73)$$

где  $D(p) = E(p) + F(p) = \sum_{i=1}^n D_i p^i$  — полином знаменателя передаточной функции замкнутой САУ.

Приведем значения коэффициентов этих полиномов для разных степеней

Степень $p$	Коэффициенты $D_i$
$i = 0;$	$D_0 = E_0 + F_0;$
$i = 1;$	$D_1 = E_1 + F_1;$
$\vdots$	$\vdots$
$i = m;$	$D_m = E_m + F_m;$
$i = m + 1;$	$D_{m+1} = E_{m+1} + F_{m+1};$
$\vdots$	$\vdots$
$i = n - 1;$	$D_{n-1} = 0 + F_{n-1};$
$i = n.$	$D_n = 0 + F_n.$

Порядок полинома  $D(p)$  равен  $n$  — порядку старшего полинома  $F(p)$ . Если предположить, что в (5.72)  $p = 0$ , то коэффициент усиления замкнутой САР  $k_3 = k/(1+k)$ .

**Передаточная функция замкнутой САР по ошибке.** Эта передаточная функция выражается отношением преобразований Лапласа ошибки и задающего воздействия:

$$W_{\Delta}(p) = \Delta(p)/g(p). \quad (5.74)$$

При  $q = 0$  структурную схему, приведенную на рис. 5.15, а, можно преобразовать к виду, показанному на рис. 5.15, в. Передаточная функция  $W_{\Delta}(p)$  может быть выражена через передаточную функцию разомкнутой САР:

$$W_{\Delta}(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)}. \quad (5.75)$$

Подставляя в выражение (5.74) значение  $W_p(p)$  из уравнения (5.67), получим:

$$W_{\Delta}(p) = \frac{F(p)}{F(p) + E(p)} = \frac{F(p)}{D(p)}. \quad (5.76)$$

Это выражение можно разложить в ряд Тейлора по возрастающим степеням  $p$ :

$$W_{\Delta}(p) = C_0 + \frac{C_1}{1!} p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \frac{C_3}{3!} p^3 + \dots = C(p). \quad (5.77)$$

Такой ряд сходится при  $p \rightarrow 0$ , т.е. при  $t \rightarrow \infty$ , что соответствует установившемуся процессу. Величины  $C_i$  называют коэффициентами ошибок. Их можно определить по общему правилу разложения функции в ряд Тейлора:

$$C_0 = [W_{\Delta}(p)]_{p=0}; \quad C_1 = \left[ \frac{dW_{\Delta}(p)}{dp} \right]_{p=0}; \quad C_n = \left[ \frac{d^n W_{\Delta}(p)}{dp^n} \right]_{p=0}.$$

Так как передаточная функция по ошибке является дробно-рациональной, то коэффициенты ошибок можно получить проще, разделив полином числителя на полином знаменателя и сравнив полученный ряд с выражением

$$C(p) = F(p)/D(p).$$

Для определения коэффициента ошибок умножим правую и левую части этого тождества на полином  $D(p)$ . Тогда

$$F(p) = C(p)D(p),$$

или

$$\begin{aligned} & F_n p^n + F_{n-1} p^{n-1} + \dots + F_i p^i + \dots + F_1 p + F_0 = \\ & = \left[ \frac{C_n}{n!} p^n + \frac{C_{n-1}}{(n-1)!} p^{n-1} + \dots + \frac{C_i}{i!} p^i + \dots + \frac{C_1}{1!} p + C_0 \right] \times \\ & \times [D_n p^n + D_{n-1} p^{n-1} + \dots + D_i p^i + \dots + D_1 p + D_0]. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях  $p$ .

Степень  $p$

$i = 0;$

$i = 1;$

$i = 2;$

$\vdots$

$i = n.$

Коэффициенты  $F_i$

$$F_0 = C_0 D_0;$$

$$F_1 = C_1 D_0 + C_0 D_1;$$

$$F_2 = \frac{C_2}{2!} D_0 + C_1 D_1 + C_0 D_2;$$

$\vdots$

$$F_n = \frac{C_n}{n!} D_0 + \frac{C_{n-1}}{(n-1)!} D_1 + \dots + C_1 D_{n-1} + C_0 D_n.$$

Из выражений для коэффициентов  $F_i$  можно найти формулы для вычисления коэффициентов  $C_i$  полинома  $C(p)$ :

$$C_0 = \frac{F_0}{D_0} = \frac{F_0}{F_0 + E_0};$$

$$C_1 = \frac{1}{D_0}(F_1 - C_0 D_1) = \frac{1}{D_0}[F_1 - C_0(F_1 + E_1)];$$

$$\frac{C_2}{2!} = \frac{1}{D_0}[F_2 - (C_1 D_1 + C_0 D_2)] = \frac{1}{D_0}\{F_2 - [C_1(F_1 + E_1) + C_0(F_2 + E_2)]\}.$$

Отсюда следует формула для  $i$ -го члена:

$$\frac{C_i}{i!} = \frac{1}{D_0} \left( F_i - \sum_{k=1}^i \frac{C_{i-k}}{(i-k)!} D_k \right). \quad (5.78)$$

Таким образом, коэффициенты ошибок выражаются через коэффициенты полиномов  $F(p)$  и  $E(p)$ , т.е. через физические параметры звеньев системы. На основе выражений (5.76) и (5.77) можно записать уравнение для ошибки:

$$\Delta(p) = W_{\Delta}(p) g(p) = \left( C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \dots + \frac{C_n}{n!} p^n \right) g(p).$$

Уравнение для ошибки в области времени:

$$\Delta(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{d g(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + \frac{C_n}{n!} \frac{d^n g(t)}{dt^n}. \quad (5.79)$$

Из уравнения (5.79) видно, что при заданном  $g(t)$  ошибка  $\Delta(t)$  будет равна нулю, только когда все  $\frac{C_i}{i!} = 0$ . Поэтому физически невозможно получить систему с нулевыми установившимися ошибками. Однако можно получить системы, у которых равны нулю отдельные коэффициенты ошибок.



**Передаточная функция замкнутой системы по возмущению.** Эта передаточная функция выражается соотношением преобразований Лапласа реакции и возмущения:

$$W_q(p) = z(p)/q(p). \quad (5.80)$$

При этом структурную схему, приведенную на рис. 5.15, а, можно преобразовать в вид, показанный на рис. 5.15, г. Передаточную функцию определяют по уравнению (5.80) для заданного возмущения, не учитывая все другие возмущения и задающее воздействие. Знак ГОС на этой схеме учтен введением дополнительного звена с передаточной функцией  $W_{n+1}(p) = -1$ . Звено с передаточной функцией  $W_n(p)$  находится в цепи прямой связи относительно возмущения  $q(p)$ , а звенья  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$ , ...,  $W_{n+1}(p)$  — в цепи обратной связи. Поэтому

$$W_q(p) = \frac{W_n(p)}{1 - \prod_{i=1}^{n+1} W_i(p)} = \frac{W_n(p)}{1 + W_p(p)}. \quad (5.81)$$

Перенесем точку разветвления с выхода звена  $W_n(p)$  на его вход, введя это звено в цепь обратной связи. В этой цепи оказываются теперь все  $n$  звеньев, поэтому передаточная функция цепи обратной связи совпадает с передаточной функцией разомкнутой системы  $W_p(p)$ . Учтем дополнительное звено с передаточной функцией  $W_{n+1}(p) = -1$ , изменив знак в элементе сравнения с плюса на минус (см. рис. 5.15, д). Первую часть этой схемы, содержащую цепь обратной связи, можно заменить эквивалентным звеном с передаточной функцией  $[1 + W_p(p)]^{-1}$ . Вторая часть  $W_n(p)$  представляет собой передаточную функцию разомкнутой САУ по возмущающему воздействию  $W_{qp}(p)$ , так как она, в соответствии с рис. 5.15, а, определяет связь между выходной координатой  $z$  системы и возмущением  $q$  при разомкнутой цепи главной обратной связи. Поменяв местами звенья  $W_{qp}(p)$  и  $[1 + W_p(p)]^{-1}$ , получим схему, приведенную на рис. 5.15, е.

Таким образом, для нахождения передаточной функции САУ по некоторому возмущению  $q$ , приложенному в любой точке системы, *следует найти передаточную функцию разомкнутой системы по этому возмущению  $W_{qp}(p)$  и разделить ее на передаточную функцию разомкнутой системы  $W_p(p)$ , увеличенную на единицу:*

$$W_q(p) = \frac{W_{qp}(p)}{1 + W_p(p)}. \quad (5.82)$$

**Передаточная функция по ошибке относительно возмущения.** Эта передаточная функция представляет собой отношение преобразований Лапласа ошибки и возмущения:

$$W_{\Delta q}(p) = \Delta(p)/q(p). \quad (5.83)$$

Для ее определения необходимо структурную схему, приведенную на рис. 5.15, а, преобразовать так, чтобы выходной координатой стала ошибка  $\Delta$ , а входной — возмущение  $q$  (см. рис. 5.15, ж). Сравнивая этот рисунок с рис. 5.15, з, можно сделать вывод о том, что  $W_{\Delta q}(p) = -W_q(p)$ . Предоставляем возможность читателям доказать этот вывод самостоятельно. Если же на САУ действует несколько возмущений, то

$$W_{\Delta q_i}(p) = -W_{q_i}(p). \quad (5.84)$$

**Уравнение выходной координаты САУ.** По аналогии с выражением (3.2) запишем операторное уравнение САУ, сложив составляющие реакции системы от действия задающего сигнала и возмущения для системы, структурная схема которой приведена на рис. 5.15, а:

$$z(p) = z_g(p) + z_q(p).$$

Составляющая реакции этой системы от задающего сигнала на основе соотношения (5.71)

$$z_g(p) = W_3(p)g(p).$$

Составляющую реакцию от действия возмущения найдем на основе отношения (5.80):

$$z_q(p) = W_q(p)q(p).$$

Суммарная реакция САУ при одновременном действии задающего сигнала и возмущения

$$z(p) = z_g(p) + z_q(p) = W_3(p)g(p) + W_q(p)q(p).$$

Если на систему действует  $l$  возмущений, то выражение для суммарной реакции можно записать в виде

$$\begin{aligned} z(p) &= W_3(p)g(p) + \sum_{i=1}^l W_{q_i}(p)q_i(p) = \\ &= W_3(p)g(p) + \sum_{i=1}^l \frac{W_{q_i p}(p)}{1 + W_p(p)} q_i(p). \end{aligned} \quad (5.85)$$

Подставим в выражение (5.85) соответствующие передаточные функции, определенные ранее как отношения полиномов:

$$\begin{aligned} z(p) &= \frac{E(p)}{D(p)}g(p) + \frac{1}{1 + W_p(p)} \sum_{i=1}^l W_{q_i p}(p)q_i(p) = \\ &= \frac{E(p)}{D(p)}g(p) + \frac{F(p)}{D(p)} \sum_{i=1}^l W_{q_i p}(p)q_i(p). \end{aligned}$$

Умножив левую и правую части на  $D(p)$ , получим:

$$D(p)z(p) = E(p)g(p) + F(p) \sum_{i=1}^l W_{q_i p}(p)q_i(p). \quad (5.86)$$

Если в этом выражении перейти от изображений к оригиналам, то получим дифференциальное уравнение системы.

**Уравнение ошибки САУ** может быть найдено по аналогии с уравнением выходной координаты. При этом также необходимо учесть две составляющих ошибки от действия задающего сигнала и возмущения:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \Delta_g(p) + \Delta_q(p) = W_\Delta g(p) - \sum_{i=1}^l W_{q_i}(p)q_i(p) = \\ &= W_\Delta(p)g(p) - \frac{1}{1 + W_p(p)} \sum_{i=1}^l W_{q_i p}(p)q_i(p). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Подставим в выражение (5.87) соответствующие передаточные функции, определенные как отношения полиномов:

$$\Delta(p) = \frac{F(p)}{D(p)} \left[ g(p) - \sum_{i=1}^l W_{q_i p}(p) q_i(p) \right], \text{ т.е.}$$

$$D(p) \Delta(p) = F(p) \left[ g(p) - \sum_{i=1}^l W_{q_i p}(p) q_i(p) \right]. \quad (5.88)$$

Полученные выражения (5.86) и (5.88) позволяют найти законы изменения реакции и ошибки системы (законы движения) при воздействии на систему задающего сигнала и возмущения, которые используют при расчете процессов регулирования в линейных системах.

#### 5.4. Частотные характеристики разомкнутых и замкнутых САУ

Частотные характеристики можно получить, заменив оператор  $p$  на  $j\omega$  в выражениях передаточных функций.

Так, для разомкнутых САУ

$$W_p(j\omega) = E(j\omega) / F(j\omega); \quad (5.89)$$

для замкнутых

$$W_3(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{F(j\omega) + E(j\omega)} = \frac{E(j\omega)}{D(j\omega)}; \quad (5.90)$$

по ошибке

$$W_\Delta(j\omega) = \frac{1}{1 + W_p(j\omega)};$$

(5.91)

по возмущению

$$W_{q_i}(j\omega) = \frac{W_{q_i p}(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}. \quad (5.92)$$

Таким образом, все ЧХ (5.90)—(5.92) выражаются через ЧХ разомкнутой системы. Их графики можно построить по графикам ЧХ разомкнутой САУ с помощью специальных номограмм [8]. Поэтому ограничимся рассмотрением способов построения ЧХ разомкнутых САУ.

Частотная характеристика разомкнутой системы, состоящей из нескольких последовательно соединенных звеньев, в соответствии с (5.60) определится выражением

$$W_p(j\omega) = \prod_{i=1}^k W_i(j\omega). \quad (5.93)$$

Выразим эту характеристику через АЧХ и ФЧХ:

$$A_p(\omega) \exp[j\varphi_p(\omega)] = \prod_{i=1}^k A_i(\omega) \exp[j\varphi_i(\omega)]. \quad (5.94)$$

Отсюда по правилам перемножения векторов:

$$A_p(\omega) = \prod_{i=1}^k A_i(\omega); \quad (5.95)$$

$$\varphi_p(\omega) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(\omega). \quad (5.96)$$

Задаваясь значениями частоты  $\omega$ , можно построить на комплексной плоскости амплитудно-фазовую характеристику САУ как годограф вектора ЧХ в соответствии с выражениями (5.89—5.96). Значительно проще построить логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) разомкнутой САУ, сложив графически  $\varphi_i(\omega)$  и  $L_i(\omega)$ . При этом из выражения (5.95) следует, что ЛАЧХ разомкнутой САУ определяется выражением

$$L_p(\omega) = \sum_{i=1}^k L_i(\omega).$$

В качестве примера рассмотрим построение ЛАЧХ разомкнутой САУ частотная характеристика которой имеет вид:

$$W_p(j\omega) = \frac{k(1+j\omega T_1)}{j\omega(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}.$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики этой системы:

$$A_p(\omega) = \frac{k\sqrt{1+(\omega T_1)^2}}{\omega\sqrt{1+(\omega T_2)^2}\sqrt{1+(\omega T_3)^2}};$$

$$\varphi_p(\omega) = -90^\circ + \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3.$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика системы:

$$L_p(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1+(\omega T_1)^2} - 20 \lg \sqrt{1+(\omega T_2)^2} - 20 \lg \sqrt{1+(\omega T_3)^2}. \quad (5.97)$$

Допустим, что сопрягающие частоты этой системы находятся в следующих соотношениях:  $(\omega_{сп1} = 1/T_1) < (\omega_{сп2} = 1/T_2) < (\omega_{сп3} = 1/T_3)$ . Тогда уравнения асимптот имеют вид:  $L_{a1}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$  при  $\omega < \omega_{сп1}$  [графиком  $L_{a1}(\omega)$  является прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек, проходящая через точку с координатами  $\omega = 1$ ,  $L_{a1}(1) = 20 \lg k$  (рис. 5.16)];  $L_{a2}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega + 20 \lg \omega T_1$  при  $\omega_{сп1} < \omega < \omega_{сп2}$  [графиком  $L_{a2}(\omega)$  является горизонтальная прямая];  $L_{a3}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega + 20 \lg \omega T_1 - 20 \lg \omega T_2$  при  $\omega_{сп2} < \omega < \omega_{сп3}$  [графиком  $L_{a3}(\omega)$  является прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек];  $L_{a4}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega + 20 \lg \omega T_1 - 20 \lg \omega T_2 - 20 \lg \omega T_3$  при  $\omega > \omega_{сп3}$  [графиком  $L_{a4}(\omega)$  является прямая с наклоном  $-40$  дБ/дек].

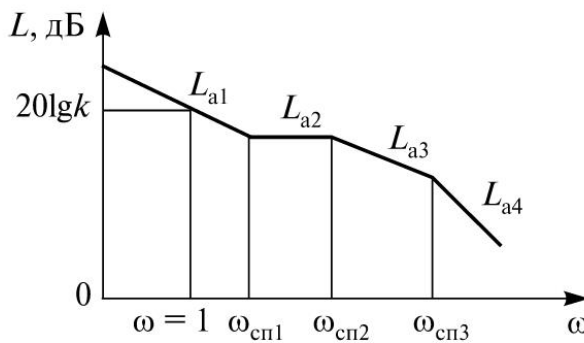


Рис. 5.16. Пример построения ЛАЧХ разомкнутой САУ по (5.97) при  $(\omega_{сп1} = 1/T_1) < (\omega_{сп2} = 1/T_2) < (\omega_{сп3} = 1/T_3)$

Частотная характеристика разомкнутой САУ для передаточной функции по (5.69) имеет вид:

$$W_p(j\omega) = \frac{k \prod_{u=1}^{\alpha} (1 + j\omega T_u)}{j\omega^v \prod_{r=1}^{\beta} (1 + j\omega T_r) \prod_{s=1}^{\gamma} (1 - \omega^2 T_s^2 + j2\omega n_s T_s)}.$$

Амплитудная и фазовые частотные характеристики такой системы:

$$A_p(\omega) = \frac{k \prod_{u=1}^{\alpha} \sqrt{1 + \omega^2 T_u^2}}{\omega^v \prod_{r=1}^{\beta} \sqrt{1 + \omega^2 T_r^2} \prod_{s=1}^{\gamma} \sqrt{(1 - \omega^2 T_s^2)^2 + (2\omega n_s T_s)^2}};$$

$$\varphi_p(\omega) = -v \cdot 90^\circ + \sum_{u=1}^{\alpha} \operatorname{arctg} \omega T_u - \sum_{r=1}^{\beta} \operatorname{arctg} \omega T_r - \sum_{s=1}^{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{2\omega n_s T_s}{1 - \omega^2 T_s^2}.$$

Способ построения ЛАЧХ для этой системы остается таким же, как и для ранее рассмотренной.

При построении ЛАЧХ многоконтурной САУ необходимо выделить участки структурной схемы  $W_a(p)$ , охваченные местными обратными связями  $W_b(p)$  (рис. 5.17, а). Передаточная функция такого участка

$$W_{\text{уч}}(p) = \frac{W_a(p)}{1 + W_a(p)W_b(p)}. \quad (5.98)$$

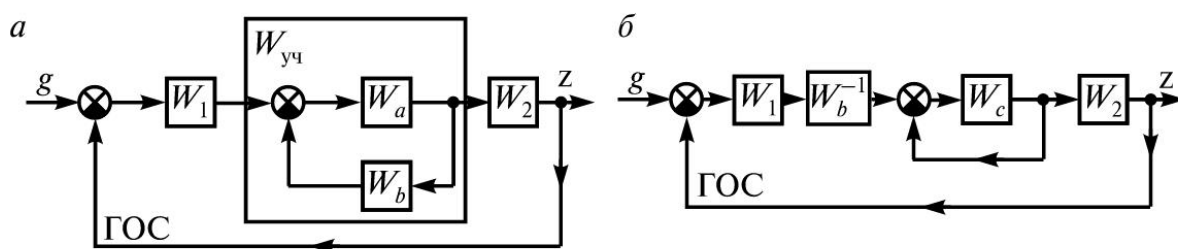


Рис. 5.17. Структурные схемы многоконтурных САУ



Для того чтобы систему можно было рассматривать как одноконтурную, ее передаточную функцию можно также представить в виде

$$W_{\text{уч}}(p) = \frac{1}{W_b(p)} \cdot \frac{W_a(p)W_b(p)}{1 + W_a(p)W_b(p)} = \frac{W_d(p)}{W_b(p)}. \quad (5.99)$$

При этом  $W_d(p) = W_c(p)/[1 + W_c(p)]$  можно рассматривать как новый замкнутый участок структурной схемы, а  $W_c(p) = W_a(p) \times W_b(p)$  — как передаточную функцию прямой разомкнутой цепи (рис. 5.17, б).

В дальнейшем исходную систему можно считать одноконтурной с последовательно включенными звеньями  $W_1(p)$ ,  $W_{\text{уч}}(p)$  и  $W_2(p)$ .

Определить ЧХ для  $W_d(p)$  можно аналитическим способом по формулам (5.98) и (5.99). Однако большее распространение получил графический метод расчета по специальным номограммам, позволяющим по ЛЧХ разомкнутой части структурной схемы определить характеристики замкнутого участка.

## 5.5. Установившийся режим работы САУ

*Установившимся называют режим работы САУ, при котором все сигналы в ней не изменяются во времени.* Такой режим работы называют еще *статическим* [1, 32]. Установившийся режим работы САУ изучают с целью обеспечения заданной статической точности, а также для определения статической характеристики системы по статическим характеристикам отдельных ее звеньев.

При этом под статической характеристикой понимают связь между выходной и входной координатами звена (системы) в установившемся режиме. По виду статических характеристик различают статическое и астатическое регулирование.

**Статической** называют такую САУ, которая после приведения к одноконтурной схеме содержит только позиционные звенья.

Уравнения выходной координаты и ошибки САУ в установившемся режиме можно получить, приняв в (5.85) и (5.87)  $p \rightarrow 0$ , тогда

$$z_y = \lim_{p \rightarrow 0} pz(p);$$

$$z_y = W_3(0)[pg(p)]_{p=0} + \frac{1}{1 + W_p(0)} \sum_{i=1}^k W_{q_i p}(0)[pq_i(p)]_{p=0}; \quad (5.100)$$

$$\Delta_y = \lim_{p \rightarrow 0} p\Delta(p);$$

$$\Delta_y = W_\Delta(0)[pg(p)]_{p=0} - \frac{1}{1+W_p(0)} \sum_{i=1}^k W_{q_i p}(0)[pq_i(p)]_{p=0}. \quad (5.101)$$

Как видно из (5.100) и (5.101), выходная координата и ошибка САУ зависят от всех воздействий, приложенных к системе. По-прежнему можно считать, что:

$$z_y = z_{yg} + z_{yq}, \quad \Delta_y = \Delta_{yg} + \Delta_{yq}.$$

При этом

$$z_{yg} = W_3(0)[pg(p)]_{p=0};$$

$$z_{yq} = \frac{1}{1+W_p(0)} \sum_{i=1}^k W_{q_i p}(0)[pq_i(p)]_{p=0};$$

$$\Delta_{yg} = W_\Delta(0)[pg(p)]_{p=0};$$

$$\Delta_{yq} = -\frac{1}{1+W_p(0)} \sum_{i=1}^k W_{q_i p}(0)[pq_i(p)]_{p=0}.$$

Значения передаточных функций, входящих в эти выражения, на основе (5.67), (5.72), (5.84), (5.75) и (5.82) запишем через соответствующие коэффициенты усиления:

$$W_p(0) = k, \quad W_3(0) = \frac{k}{1+k}, \quad W_\Delta(0) = \frac{1}{1+k}, \quad W_{q_i p}(0) = k_{q_i p},$$

где  $k$  — коэффициент усиления разомкнутой САУ;

$k_{q_i p}$  — коэффициент усиления по возмущению разомкнутой САУ, определяемый по коэффициентам усиления звеньев, стоящих в цепи, от  $i$ -го возмущения к выходной координате  $z$ .

Часто величину

$$W_\Delta(0) = \frac{1}{1+k} = k_\Delta = s \quad (5.102)$$

называют *статизмом регулирования*. Статизм характеризует значение отклонения выходной координаты на единицу отклонения задающего воздействия. Кроме того, в линейных САУ статизм может быть определен по относительному отклонению регулируемой величины:

$$s = (z_0 - z_{\min}) / z_0 = \Delta z / z_0, \quad (5.103)$$

где  $z_0$  и  $z_{\min}$  — заданное и минимальное значения регулируемой величины.

Задавшись возможным диапазоном  $\Delta z$  и приравняв выражения (5.102) и (5.103), можно найти необходимое значение коэффициента усиления разомкнутой САУ.

Как видно из уравнения (5.101), ошибка в статической системе зависит от значения приложенного воздействия  $g$  и  $q_i$ . В большинстве случаев такая зависимость является нежелательной. Полное устранение статической ошибки в системе возможно, если  $W_{\Delta}(0) = s = 0$  и все  $W_{q_i}(0) = 0$ . САУ с нулевыми статическими ошибками назовем *астатическими*. Ниже будет показано, что это условие легко выполнить, введя в состав САУ интегрирующее звено. Звено необходимо включить так, чтобы оно не попало ни в одну цепь передачи воздействия от любого возмущения  $q_i$  к выходной координате.

---

## Глава 6. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

### 6.1. Модели односвязных непрерывных линейных стационарных САУ

Использование моделей «вход—выход» характерно для классической теории управления. В современной теории управления вводится понятие «*пространства состояний системы*» [13]. Синонимом этого термина является термин «*фазовое пространство*». При рассмотрении линейных систем [26] обычно говорят «пространство состояний», при рассмотрении нелинейных систем чаще используют термин «фазовое пространство». Для введения этих важных понятий рассмотрим вначале иную форму моделей системы. Пусть модель «вход—выход» задана дифференциальным уравнением

$$f\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, \dots, y, \frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{du}{dt}, u, t\right) = 0, m \leq n, \quad (6.1)$$

где  $y$  и  $u$  — соответственно сигналы на входе системы и управление;  
 $t$  — время.

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка преобразуем в систему, состоящую из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2)$$

и уравнение, связывающее  $y$  с переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n, u$ :

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

В том случае, когда на входе системы  $r$  сигналов  $u_1, u_2, \dots, u_r$ :

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.3)$$

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r).$$

Для автономных (стационарных) систем левая часть уравнения (6.1) и правые части уравнений (6.2), (6.3) не зависят от времени.

Функции  $x_i$  называют *фазовыми переменными* (или фазовыми координатами), а множество значений фазовых переменных определяет фазовое пространство (пространство состояний).

Пусть функционирование системы при  $t \geq t_0$  описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом. Общее решение этого уравнения зависит от произвольных постоянных, которые можно определить из начальных условий при  $t = t_0$ . Состояние системы в момент  $t_0$  содержит всю информацию о прошлом системы, необходимую для определения реакции на произвольный сигнал, т.е. состояние системы в момент  $t_0$  отделяет будущее от прошлого. В момент времени  $t_i$  значения фазовых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  определяют положение точки в пространстве состояний или, иначе, задают состояние системы. Последовательность состояний  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определяет *фазовую траекторию*.

Рассмотрим способы преобразования дифференциального уравнения  $n$ -го порядка в систему из  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Пусть модель «вход—выход» системы имеет вид:

$$f\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, u, t\right) = 0, \quad (6.4)$$

где  $y$  — сигнал на выходе системы;

$u$  — управление — сигнал на входе системы.

Введем обозначения:

$$y = x_1; \quad \frac{dy}{dt} = x_2; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = x_3, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = x_n.$$

Тогда при этих обозначениях уравнение (6.4) преобразуется в систему из  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка и уравнения для выходного сигнала:

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{dx_n}{dt}, x_n, \dots, x_2, x_1, u, t\right) &= 0; \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n; \\ y &= x_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Проиллюстрируем эту процедуру на примере преобразования линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, являющегося моделью «вход—выход» линейной стационарной односвязной системы. Пусть модель системы имеет вид:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u. \quad (6.6)$$

В том случае, когда в дифференциальном уравнении коэффициент  $A_n$  при старшей производной отличен от 1, делят левую и правую части уравнения на  $A_n$  и преобразуют исходное уравнение к виду (6.6).

Введем обозначения, приведенные выше. Тогда модель «вход—выход» преобразуется в модель, состоящую из  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n; \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3; \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \end{aligned} \right\}$$

и  $y = x_1$ . (6.7)

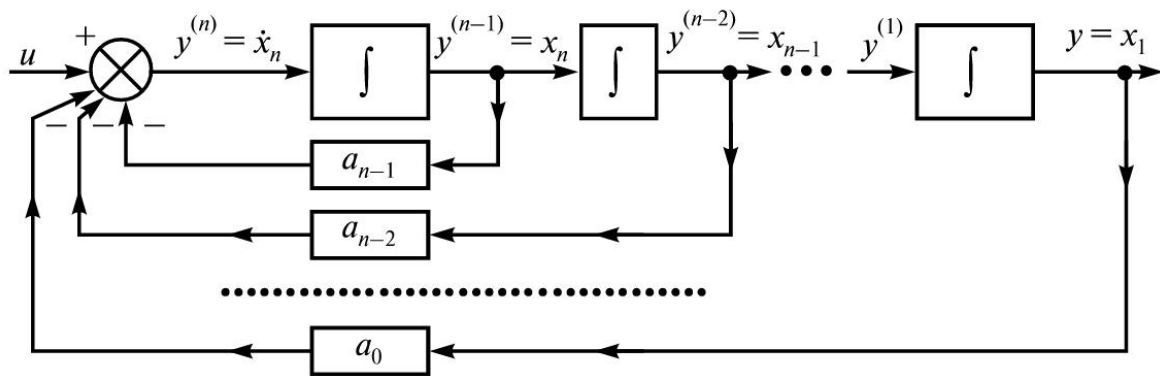


Рис. 6.1 Схема, моделирующая линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

Схема, моделирующая уравнение (6.7), представлена на рис. 6.1.

В этой схеме прямоугольник, в котором поставлен символ «интеграл», является интегратором (функция на выходе является интегралом от функции на его входе); прямоугольник, в котором поставлен символ  $a$  — усилителем с соответствующим коэффициентом усиления; кружок — алгебраическим сумматором.

Сигналы  $y^{(i)}$  на выходе интеграторов определяются выражением

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}.$$

На схеме рис. 6.1  $u - a_{n-1}y^{(n-1)} - a_{n-2}y^{(n-2)} - \dots - a_0y = y^{(n)}$ , что полностью соответствует уравнению (6.6). Введенные выше обозначения фазовых переменных на выходе интеграторов также приведены на схеме. При этом система уравнений (6.7) может быть непосредственно выписана из схемы моделирования. Обратим внимание на то, что выходы интеграторов являются фазовыми переменными.

Схема моделирования приведена лишь для того, чтобы в более сложном случае, рассматриваемом ниже, можно было, базируясь на описанном подходе, дать способ преобразования моделей.

В матричной форме система уравнений (6.7) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (6.8)$$



$$y = x_1, \quad (6.9)$$

или в сокращенной форме:

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad (6.10)$$

$$y = x_1, \quad (6.11)$$

где  $B$  — вектор-столбец, состоящий из  $(n - 1)$ -го нуля и последней единицы.

### Пример 6.1

Преобразовать модель «вход—выход»  $A_2\ddot{y} + A_1\dot{y} + A_0y = kz$  в матричную модель.

1-й шаг.

Преобразуем заданное дифференциальное уравнение так, чтобы коэффициент при старшей производной был равен 1:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u, \quad (6.12)$$

где

$$a_1 = \frac{A_1}{A_2}; a_0 = \frac{A_0}{A_2}; u = \frac{k}{A_2}z.$$

2-й шаг.

Разрешаем дифференциальное уравнение (6.12) относительно старшей производной:

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y. \quad (6.13)$$

3-й шаг.

Рисуем моделирующую схему уравнения (6.13) и вводим обозначения фазовых переменных на выходах интеграторов так, как это показано на рис. 6.2.

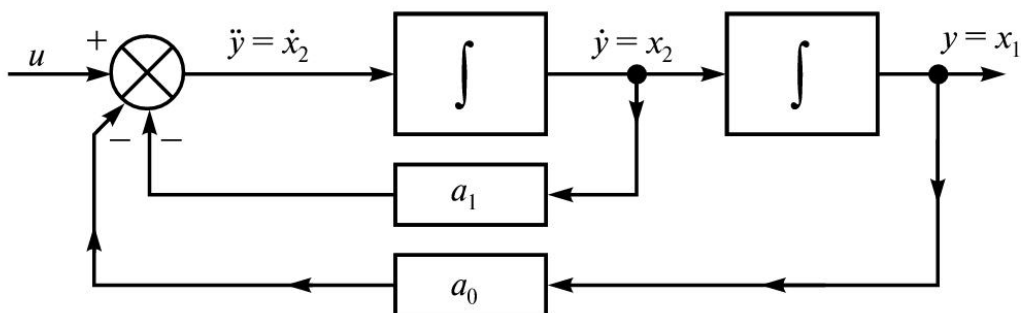


Рис. 6.2. Схема, моделирующая линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

4-й шаг.

Выписываем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= u - a_0 x_1 - a_1 x_2; \\ y &= x_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

5-й шаг.

Записываем систему (6.14) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$y = x_1.$$

Более сложным является преобразование дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \beta_n \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u. \quad (6.15)$$

Обратим внимание на то, что порядок производной правой части уравнения (6.15) не превышает порядка производной левой части. Этим учитывается отсутствие в практических приложениях идеальных дифференцирующих звеньев.

Представим уравнение (6.15) моделирующей схемой, приведенной на рис. 6.3.

Непосредственно из схемы моделирования следует:

$$y = x_1 + b_0 u; \quad (6.16)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1 u; \quad (6.17)$$

.....

$$\dot{x}_k = x_{k+1} + b_k u, \quad k < n;$$

$$\dot{x}_n = b_n u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n.$$

Откуда, дифференцируя равенство (6.16), с учетом (6.17) получаем:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + b_0 \dot{u} = x_2 + b_1 u + b_0 \dot{u}.$$

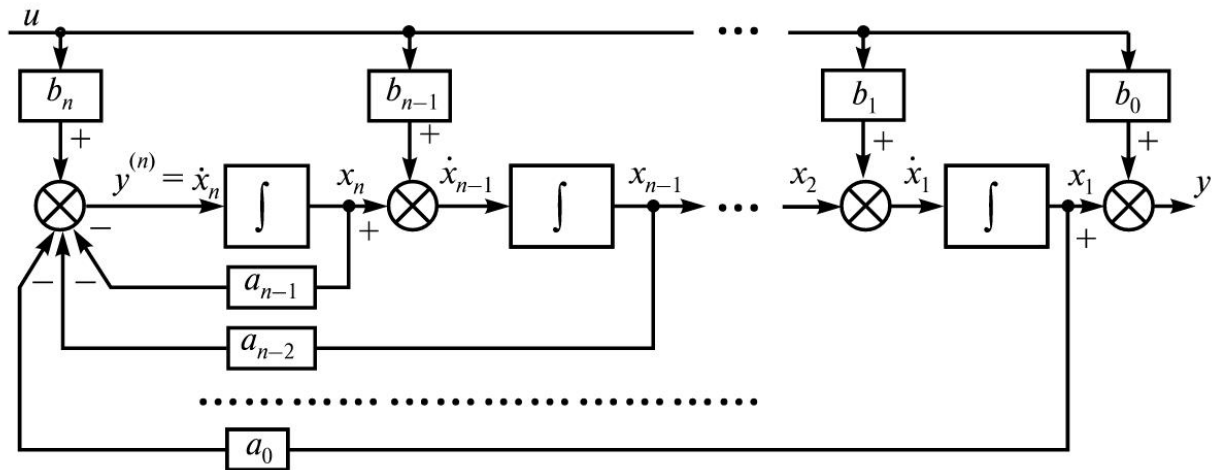


Рис. 6.3. Схема, моделирующая линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, в правой части которого линейная комбинация функций и ее производных

Аналогично, остальные производные уравни:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 + b_1 \dot{u} + b_0 \ddot{u} = x_3 + b_2 u + b_1 \dot{u} + b_0 \ddot{u};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)} = x_n + b_{n-1} u + b_{n-2} u^{(1)} + \dots + b_0 u^{(n-1)};$$

$$y^{(n)} = (b_n u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n) + b_{n-1} u^{(1)} + \dots + b_0 u^{(n)}. \quad (6.18)$$

Подставив  $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$  в (6.15) и сопоставляя результат с  $y^{(n)}$ , задаваемый уравнением (6.18), получаем рекуррентную процедуру для вычисления коэффициентов  $b_i$ :

$$b_0 = \beta_n;$$

$$b_1 = \beta_{n-1} - a_{n-1} b_0;$$

$$b_2 = \beta_{n-2} - a_{n-1} b_1 - a_{n-2} b_0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_n = \beta_0 - a_{n-1} b_{n-1} - a_{n-2} b_{n-2} - \dots - a_0 b_0.$$

Эта система может быть представлена в матричной форме;

$$\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

где  $[\ ]^{-1}$  — обратная матрица коэффициентов.

Введем обозначения, которые будут удобны в дальнейшем при рассмотрении многосвязных систем:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = B, \quad [b_0] = D. \quad (6.20)$$

Непосредственно из схемы моделирования следует:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_n &= b_n u - \sum_{i=0}^{i=n-1} a_{n-i-1} x_{n-i}; \\ \dot{x}_{n-1} &= b_{n-1} u + x_n; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_1 &= b_1 u + x_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

причем на выходе схемы моделирования

$$y = b_0 u + x_1. \quad (6.22)$$

В матричной форме систему уравнений (6.19) и (6.21) можно записать:

$$\dot{X} = AX + Bu; \quad (6.23)$$

$$y = b_0 u + x_1, \quad (6.24)$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix};$$

матрица  $B$  определена выше;

$u$  — управление (при наличии одного входа — скаляр).

Для решения этой системы дифференциальных уравнений воспользуемся аппаратом преобразования Лапласа:

$$\begin{bmatrix} px_1(p) - x_1(0) \\ px_2(p) - x_2(0) \\ \dots \\ px_n(p) - x_n(0) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \\ \vdots \\ x_n(p) \end{bmatrix} + Bu(p);$$

$$y(p) = b_0 u(p) + x_1(p),$$

где  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$  — начальные условия, величины фазовых координат при  $t = 0$ .

Откуда

$$pIX(p) - X(0) = AX(p) + Bu(p)$$

и

$$(pI - A)X(p) = Bu(p) + X(0), \quad (6.25)$$

где  $I$  — единичная матрица размерности  $n$ .

$X(0)$  — вектор-столбец начальных условий фазовых координат.

Умножив левую и правую часть уравнения (6.25) на обратную матрицу  $[pI - A]^{-1}$ , получаем:

$$X(p) = u(p)(pI - A)^{-1}B + (pI - A)^{-1}X(0), \quad (6.26)$$

где первое слагаемое определяет изображения фазовых координат вынужденной составляющей переходного процесса, второе — изображение фазовых координат свободной составляющей.

Способ получения обратной матрицы описан в примере 6.2.

Переходя к оригиналам, получаем зависимости  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Сигнал  $y(t)$  на выходе системы определяется по формуле (6.24). Если  $\beta_0 = 1, \beta_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , то  $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n), b_n = 1$  и система уравнений (6.21) совпадает с (6.7).

### **Пример 6.2**

Модель системы задана:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = u - 3x_2 - 2x_1; \\ y &= x_1; \quad x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Сигнал на входе системы  $u(t) = 1(t)$ .

Требуется найти  $x_1(t) = y(t)$  и  $x_2(t)$ .

Для данной системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$pE - A = p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ +2 & p+3 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$[pE - A]^{-1} = \frac{Adj[pE - A]}{|pE - A|},$$

где  $|pE - A|$  — определитель матрицы  $[pE - A]$ ;

$Adj[pE - A]$  — присоединенная матрица.

Для ее вычисления находим алгебраические дополнения  $C_{ij}$  элементов матрицы  $[pE - A]$ . Потом составляем матрицу, элементами которой являются ал-

гебраические дополнения. Эту матрицу транспонируем. В результате получаем присоединенную матрицу\*.

В рассматриваемом примере

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} (p+3); \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2; \\ C_{21} &= (-1)^{2+1} (-1) = 1; \quad C_{22} = (-1)^{2+2} p = p. \end{aligned}$$

Матрица алгебраических дополнений

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} p+3 & -2 \\ 1 & p \end{bmatrix}.$$

Результат транспонирования — присоединенная матрица:

$$[C_{ij}]^T = \text{Adj}[pE - A] = \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы  $pE - A$  равен  $(p+3)p - (-2) \cdot 1 = p^2 + 3p + 2$ .  
Тогда

$$[pE - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2 + 3p + 2} & \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \\ \frac{-2}{p^2 + 3p + 2} & \frac{p}{p^2 + 3p + 2} \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

матрица

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Изображение входного сигнала  $u(t) = 1(t)$  равно:

$$u(p) = \frac{1}{p}. \quad (6.29)$$

Учитывая, что начальные условия нулевые,  $x(p)$  определяется первым слагаемым (6.26). После подстановки в (6.26) выражений (6.29), (6.27) и матрицы  $B$  получаем:

---

\* Читателю, не знакомому с используемыми алгебраическими понятиями, рекомендуется прочесть приложение 3.



$$\begin{bmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2+3p+2} & \frac{1}{p^2+3p+2} \\ \frac{-2}{p^2+3p+2} & \frac{p}{p^2+3p+2} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(p^2+3p+2)p} \\ \frac{p}{(p^2+3p+2)p} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Корнями знаменателя являются  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -1$ ;  $p_3 = -2$ .

Тогда

$$x_1(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{(p^2+3p+2)p} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{p(p+1)(p+2)} \right] = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t};$$

$$x_2(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{p^2+3p+2} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{(p+1)(p+2)} \right] = e^{-t} - e^{-2t};$$

$$y(t) = x_1(t).$$

В рассматриваемом примере  $x_1(t)$  — переходная функция системы,  $x_2(t)$  — импульсная (весовая) характеристика системы.

Рассмотрим далее алгебраический способ\* преобразования модели «вход—выход» в систему из  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ = \beta_n \frac{d^n u}{dt^n} + \beta_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u. \end{aligned} \quad (6.33)$$

В данном случае в отличие от дифференциального уравнения (6.15) коэффициент при старшей производной уравн  $a_n$ .

Переходя к изображениям, имеем:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(p) = (\beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0) u(p).$$

---

\* Способ разработан А.И. Сеславиным (заведующий лабораторией кафедры «Управление и информатика в технических системах» Московского государственного университета путей сообщения).

Следовательно,

$$(\beta_0 + \beta_1 p + \dots + \beta_n p^n)u(p) - (a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n)y(p) = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\begin{aligned} & \beta_0 u(p) - a_0 y(p) + p \{ \beta_1 u(p) - a_1 y(p) + p [\beta_2 u(p) - a_2 y(p) + \\ & \quad + p [\beta_3 u(p) - a_3 y(p) + \dots \\ & \quad + p [\beta_{n-1} u(p) - a_{n-1} y(p) + p \underbrace{[\beta_n u(p) - a_n y(p)]}_{x_0(p)}] \} = 0. \\ & \underbrace{\hspace{15em}}_{x_1(p)} \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$x_0(p) = \beta_n u(p) - a_n y(p); \quad (6.33)$$

$$x_1(p) = \beta_{n-1} u(p) - a_{n-1} y(p) + p x_0(p); \quad (6.33)$$

$$x_2(p) = \beta_{n-2} u(p) - a_{n-2} y(p) + p x_1(p); \quad (6.34)$$

.....

$$x_i(p) = \beta_{n-i} u(p) - a_{n-i} y(p) + p x_{i-1}(p); \quad (6.35)$$

.....

$$x_{n-1}(p) = \beta_1 u(p) - a_1 y(p) + p x_{n-2}(p); \quad (6.36)$$

$$0 = \beta_0 u(p) - a_0 y(p) + p x_{n-1}(p). \quad (6.37)$$

Из (6.33) следует:

$$y(p) = \frac{\beta_n u(p) - x_0(p)}{a_n}. \quad (6.38)$$

Подставив  $u(p)$  из (6.38) в выражения (6.33)–(6.37), получаем систему уравнений 1-го порядка относительно изображений:

$$\left. \begin{aligned} x_1(p) &= \beta_{n-1}u(p) - a_{n-1} \frac{\beta_n u(p) - x_0(p)}{a_n} + px_0(p); \\ x_2(p) &= \beta_{n-2}u(p) - a_{n-2} \frac{\beta_n u(p) - x_0(p)}{a_n} + px_1(p); \\ &\dots\dots\dots \\ x_i(p) &= \beta_{n-i}u(p) - a_{n-i} \frac{\beta_n u(p) - x_0(p)}{a_n} + px_{i-1}(p); \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1}(p) &= \beta_1 u(p) - a_1 \frac{\beta_n u(p) - x_0(p)}{a_n} + px_{n-2}(p); \\ 0 &= \beta_0 u(p) - a_0 \frac{\beta_n u(p) - x_0(p)}{a_n} + px_{n-1}(p). \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} px_0(p) &= x_1(p) - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_0(p) - \frac{\beta_{n-1}a_n - \beta_n a_{n-1}}{a_n} u(p); \\ px_1(p) &= x_2(p) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_0(p) - \frac{\beta_{n-2}a_n - \beta_n a_{n-2}}{a_n} u(p); \\ &\dots\dots\dots \\ px_{n-i}(p) &= x_i(p) - \frac{a_{n-i}}{a_n} x_0(p) - \frac{\beta_{n-i}a_n - \beta_n a_{n-i}}{a_n} u(p); \\ &\dots\dots\dots \\ px_{n-2}(p) &= x_{n-1}(p) - \frac{a_1}{a_n} x_0(p) - \frac{\beta_1 a_n - \beta_n a_1}{a_n} u(p); \\ px_{n-1}(p) &= -\frac{a_0}{a_n} x_0(p) - \frac{\beta_0 a_n - \beta_n a_0}{a_n} u(p). \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Переходя к оригиналам в (6.40), получаем при нулевых начальных условиях систему уравнений из  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка:



### Пример 6.3

Требуется, используя алгебраический способ, преобразовать модель «вход—выход» системы

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u \quad (6.43)$$

в матричную модель. Для решения этой задачи воспользуемся выражением (6.42) при  $n = 2$ :

$$a_2 = 1, \quad \beta_2 = 0, \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_0 \end{bmatrix} u. \quad (6.44)$$

$$y = -x_0. \quad (6.45)$$

Рассмотрим здесь же обратный переход от матричной модели к модели «вход—выход».

Из (6.44) получаем:

$$\dot{x}_0 = -a_1 x_0 + x_1 - \beta_1 u; \quad (6.46)$$

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_0 + x_1 - \beta_0 u. \quad (6.47)$$

Из (6.46) следует:

$$x_1 = \dot{x}_0 + a_1 x_0 + \beta_1 u. \quad (6.48)$$

Подставив (6.48) в (6.47), получаем:

$$\ddot{x}_0 + a_1 \dot{x}_0 + \beta_1 \dot{u} = -a_0 x_0 - \beta_0 u,$$

откуда

$$\ddot{x}_0 + a_1 \dot{x}_0 + a_0 x_0 = -\beta_1 \dot{u} - \beta_0. \quad (6.49)$$

После подстановки в это уравнение  $y = -x_0$  (см. выражение 6.45) получаем уравнение, совпадающее с (6.43).

## 6.2. Модели многосвязных непрерывных линейных стационарных систем автоматического управления

До сих пор рассматривались системы с одним входом и одним выходом (односвязные системы). В общем случае у системы может быть  $r$ -входов и  $l$ -выходов с перекрестными связями (многосвязные системы) [26]. Начнем рассмотрение таких систем с примера, проанализировав который, можно перейти к общему случаю.

#### Пример 6.4

Допустим, что система с двумя входами и двумя выходами описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + a_1 \dot{y}_1 + a_0 y_1 &= b_2 \ddot{u}_1 + b_1 \dot{u}_1 + c_1 \dot{u}_2 + c_0 u_2; \\ \dot{y}_2 + m_0 y_2 &= l_1 \dot{u}_1 + k_1 \dot{u}_2 + k_0 u_2,\end{aligned}$$

где  $y_1$  и  $y_2$  — сигналы на выходе системы;

$u_1$  и  $u_2$  — сигналы на входе системы.

Требуется получить совокупность передаточных функций, связывающие входы и выходы системы.

Используя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, преобразуем принятую систему уравнений к виду:

$$\begin{aligned}p^2 y_1(p) + a_1 p y_1(p) + a_0 y_1(p) &= b_2 p^2 u_1(p) + b_1 p u_1(p) + c_1 p u_2(p) + c_0 u_2(p); \\ p y_2(p) + m_0 y_2(p) &= l_1 p u_1(p) + k_1 p u_2(p) + k_0 u_2(p).\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}y_1(p) (p^2 + a_1 p + a_0) &= u_1(p) (b_2 p^2 + b_1 p) + (c_1 p + c_0) u_2(p); \\ y_2(p) (p + m_0) &= u_1(p) l_1 p + u_2(p) (k_1 p + k_0),\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}y_1(p) &= \frac{b_2 p^2 + b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0} u_1(p) + \frac{c_1 p + c_0}{p^2 + a_1 p + a_0} u_2(p); \\ y_2(p) &= \frac{l_1 p}{p + m_0} u_1(p) + \frac{k_1 p + k_0}{p + m_0} u_2(p).\end{aligned}$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_2 p^2 + b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0} & \frac{c_1 p + c_0}{p^2 + a_1 p + a_0} \\ \frac{l_1 p}{p + m_0} & \frac{k_1 p + k_0}{p + m_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix}.$$

Обозначив

$$W_{11}(p) = \frac{b^2 p^2 + b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0}, \quad W_{12}(p) = \frac{c_0}{p^2 + a_1 p + a_0},$$

$$W_{21}(p) = \frac{l_1 p}{p + m_0}, \quad W_{22}(p) = \frac{k_1 p + k_0}{p + m_0},$$

получим матричную передаточную функцию системы:

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \end{bmatrix}.$$

Обобщим этот пример для случая системы, имеющей  $r$ -входов и  $l$ -выходов. Передаточная функция  $W_{ij}(p)$  определяется выражением

$$W_{ij}(p) = \frac{y_i(p)}{u_j(p)} \quad \text{при} \quad u_k(p) = 0, \quad \text{когда} \quad k \neq j.$$

Таблица из элементов  $W_{ij}(p)$ , где индекс  $i$  обозначает строку, индекс  $j$  обозначает столбец, называется *матричной передаточной функцией*:

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \cdots & W_{1r}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & \cdots & W_{2r}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{l1}(p) & W_{l2}(p) & \cdots & W_{lr}(p) \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

Изображение входных сигналов записывают в виде вектора-столбца:

$$U(p) = \begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ \cdots \\ u_r(p) \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

Тогда изображения сигналов на выходе системы определяют следующим матричным произведением:

$$Y_{\text{вых}}(p) = W(p) U(p). \quad (6.52)$$

Результатом умножения является вектор-столбец  $Y(p)$ , состоящий из  $l$  строк, в каждой  $i$ -й строке которого записывается изображение  $i$ -го сигнала на выходе системы, т.е.

$$y_i(p) = \sum_{j=1}^{j=r} W_{ij}(p) u_j(p). \quad (6.53)$$

Переходя от изображения  $y_i(p)$  к оригиналу, получаем  $i$ -й сигнал  $y_i(t)$  на выходе системы.

Матричную импульсную характеристику системы  $K(t)$  получают после перехода от изображений к оригиналам для каждого элемента  $W_{ij}(p)$  матрицы  $W(p)$ :

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \cdots & k_{1r}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \cdots & k_{2r}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{l1}(t) & k_{l2}(t) & \cdots & k_{lr}(t) \end{bmatrix}. \quad (6.54)$$

Сигналы на выходе системы находят в соответствии с интегралом свертки:

$$Y(t) = \int_0^t K(\tau) U(t-\tau) d\tau. \quad (6.55)$$

Это символическая запись того, что

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{j=r} \int_0^t k_{ij}(\tau) u_j(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (6.56)$$



*Стандартной формой* модели линейной системы, имеющей  $r$  входов и  $l$  выходов, в современной теории управления является система уравнений:

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t) + B(t) U(t), \quad (6.57)$$

$$Y(t) = C(t) X(t) + D(t) U(t). \quad (6.58)$$

В случае стационарной линейной системы

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t); \quad (6.59)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t), \quad (6.60)$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

и элементы матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  не зависят от времени.

При

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad D = [b_0]; \quad C = [1 \ 0 \ 0 \dots 0]$$

приведенная система уравнений совпадает с полученной ранее моделью односвязной системы.

В общем виде блок-схема модели, соответствующая приведенным уравнениям, показана на рис. 6.4.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих процедуру построения стандартной формы модели многосвязной линейной стационарной системы с помощью моделирующих схем.

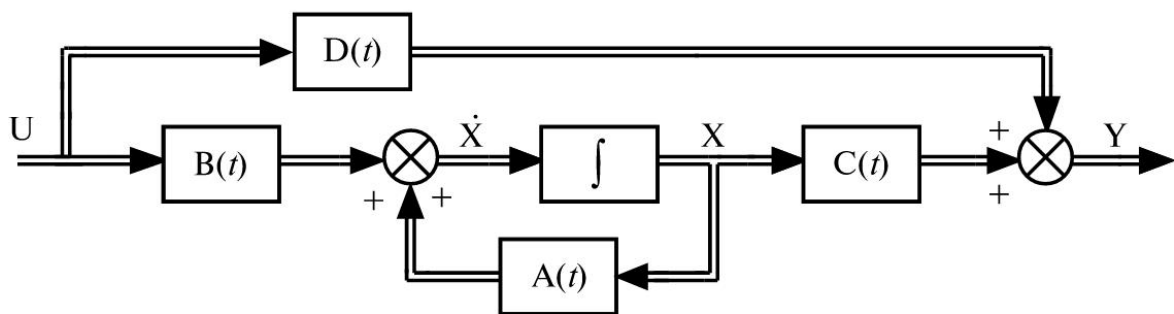


Рис. 6.4. Блок-схема модели многосвязной непрерывной системы управления

### Пример 6.5

Система задана дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_2 &= u_1; \\ \ddot{y}_2 + \dot{y}_1 + y_2 &= u_2.\end{aligned}$$

Требуется получить стандартную форму модели этой системы.

Вначале построим моделирующую схему системы, для чего разрешим данные уравнения относительно старшей производной:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= u_1 - 3\dot{y}_1 - 2y_2; \\ \ddot{y}_2 &= u_2 - \dot{y}_1 - y_2.\end{aligned}$$

Моделирующие схемы для первого и второго уравнений приведены на рис. 6.5 и 6.6.

Объединим обе моделирующие схемы (рис. 6.7).

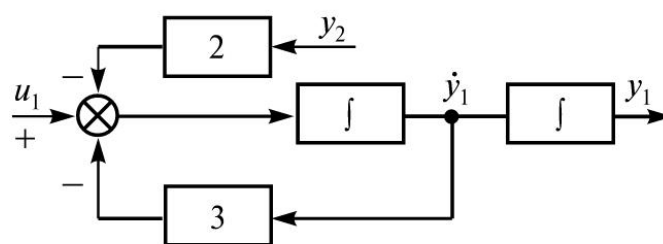


Рис. 6.5. Моделирующая схема первого уравнения

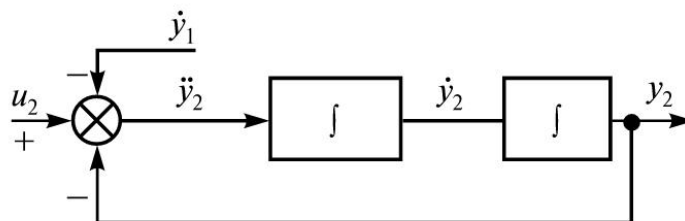


Рис. 6.6. Моделирующая схема второго уравнения

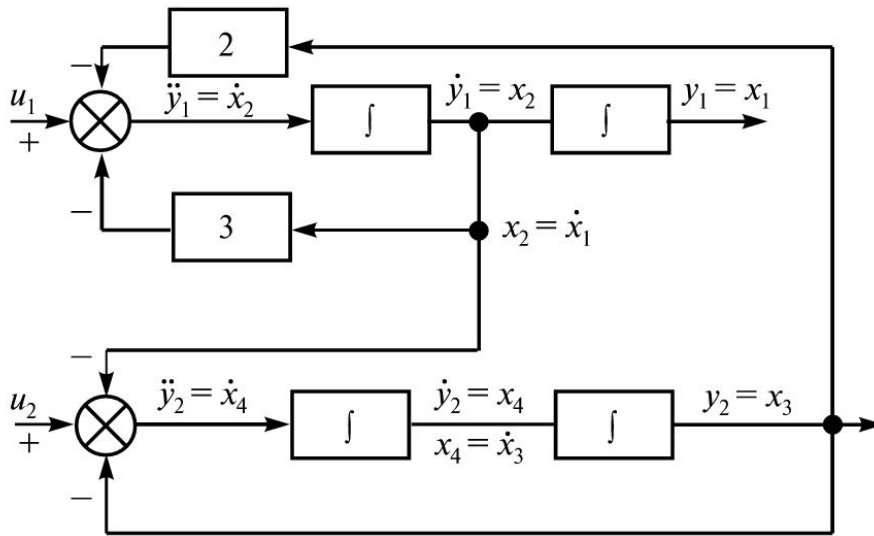


Рис. 6.7. Объединенная моделирующая схема

Введем обозначения, записанные непосредственно на моделирующей схеме, как фазовые переменные на выходе интеграторов. Тогда система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = u_1 - 2x_3 - 3x_2; \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4; \quad \frac{dx_4}{dt} = u_2 - x_2 - x_3; \\ y_1 &= x_1; \quad y_2 = x_3.\end{aligned}$$

Переходя к матричной записи, получаем стандартную форму модели:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Откуда

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

### Пример 6.6

Система задана дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 + y_1 &= u_1 + 2u_2; \\ \ddot{y}_2 + 3\dot{y}_2 + 2y_2 &= u_1 + u_2 + \dot{u}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Требуется получить стандартную форму модели этой системы.

Отличием от предыдущего примера является наличие производной  $\dot{u}_2$  в системе уравнений. Преобразуем систему уравнений, разрешив первое относительно старшей производной  $\dot{y}_1$ , второе — относительно  $\ddot{y}_2 - \dot{u}_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= u_1 + 2u_2 - y_1; \\ \ddot{y}_2 - \dot{u}_2 &= u_1 + u_2 - 3\dot{y}_2 - 2y_2. \end{aligned}$$

Построим для каждого уравнения свою моделирующую схему и объединим их (рис. 6.8).

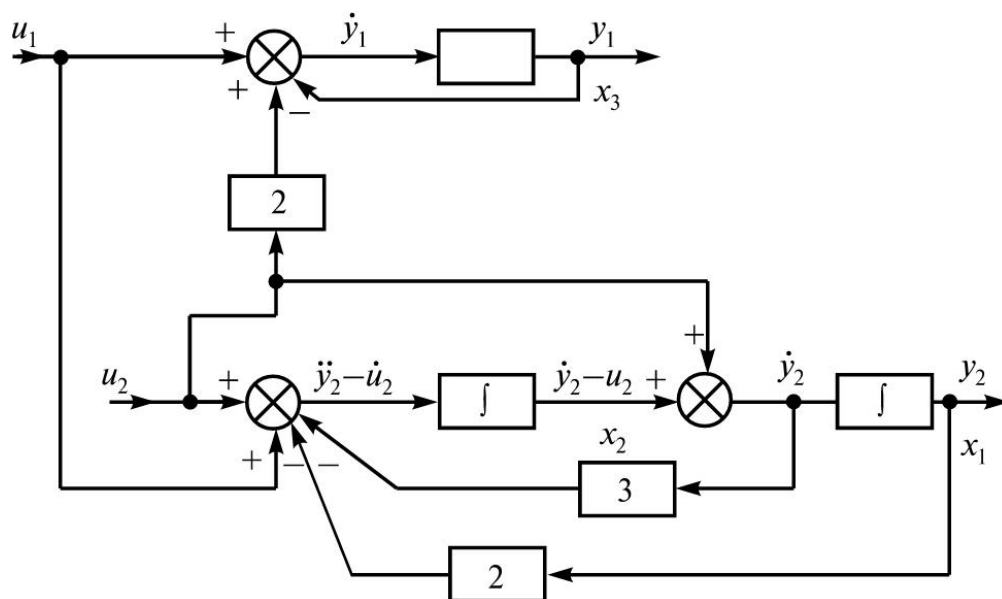


Рис. 6.8. Моделирующая схема системы уравнений (6.61)

Введем обозначения, записанные непосредственно на моделирующей схеме. Тогда система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 + u_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_2 + u_1 - 2x_1 - 3(x_2 + u_2) = -2u_2 + u_1 - 2x_1 - 3x_2; \\ \frac{dx_3}{dt} &= u_1 + 2u_2 - x_3, \quad y_1 = x_3, \quad y_2 = x_1.\end{aligned}$$

Переходя к матричной форме записи, получаем стандартную форму модели:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad (6.62)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

Поставим далее задачу определения реакции многосвязной линейной стационарной системы на совокупность заданных входных сигналов. Модель системы определяется уравнениями (6.59), (6.60). На входе системы  $r$  входных сигналов

$$U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{bmatrix}.$$

Требуется определить зависимость от времени фазовых переменных:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

и сигналов на выходе системы:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_l(t) \end{bmatrix}.$$

Начальные условия заданы:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим решение поставленной задачи с использованием преобразования Лапласа. Иные способы решения будут приведены в пп. 6.3 и 6.5.

Преобразовав по Лапласу дифференциальные уравнения (6.59), (6.60), получаем:

$$\begin{aligned} [pIX(p) - X_0] &= AX(p) + BU(p); \\ Y(p) &= CX(p) + DU(p). \end{aligned}$$

Откуда

$$X(p) = (pI - A)^{-1} BU(p) + (pI - A)^{-1} X_0; \quad (6.64)$$

$$Y(p) = CX(p) + DU(p). \quad (6.65)$$

Переходя к оригиналам, получаем:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = L^{-1}[X(p)] = L^{-1}\left\{[pI - A]^{-1} BU(p)\right\} + L^{-1}\{[pI - A]X_0\}. \quad (6.66)$$

Подставив  $X(t)$  в (6.60), определяем сигналы  $Y(t)$  на выходе системы.

При нулевых начальных условиях второе слагаемое выражения (6.66) равно нулю.

Тогда

$$Y(p) = C[pI - A]^{-1}BU(p) + DU(p) = \{C[pI - A]^{-1}B + D\}U(p) = W(p)U(p), \quad (6.67)$$

и матричная передаточная функция системы, которая уже была введена в начале этого параграфа, определится выражением

$$W(p) = C[pI - A]^{-1}B + D. \quad (6.68)$$

#### **Пример 6.7\***

Для модели системы, приведенной в примере 6.6, определить матричную передаточную функцию. В соответствии с данными примера 6.6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$[pI - A] = \begin{bmatrix} p & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 2 & p+3 & 0 \\ 0 & 0 & p+1 \end{bmatrix}.$$

Получим присоединенную матрицу  $Adj[pI - A]$ .

Алгебраические дополнения для элементов матрицы  $pI - A$  имеют вид:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} p+3 & 0 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = (p+3)(p+1);$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = -2(p+1);$$

---

\*Читателю, не знакомому с понятиями «алгебраическое дополнение» и «присоединенная матрица», рекомендуем ознакомиться с приложением 3.

$$\begin{aligned}
C_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & p+3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \\
C_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = p+1; \\
C_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = p(p+1); \\
C_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} p & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \\
C_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ p+3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \\
C_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} p & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \\
C_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} p & -1 \\ 2 & p+3 \end{vmatrix} = p^2 + 3p + 2.
\end{aligned}$$

Присоединенная матрица

$$Adj[pI - A] = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} (p+3)(p+1) & p+1 & 0 \\ -2(p+1) & p(p+1) & 0 \\ 0 & 0 & p^2 + 3p + 2 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы  $[pI - A]$  равен:

$$|pI - A| = (p+1)(p^2 + 3p + 2).$$

Тогда

$$[pI - A]^{-1} = \frac{Adj[pI - A]}{|pI - A|} = \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2 + 3p + 2} & \frac{1}{p^2 + 3p + 2} & 0 \\ -\frac{2}{p^2 + 3p + 2} & \frac{p}{p^2 + 3p + 2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+1} \end{bmatrix}. \quad (6.69)$$



Подставив (6.69) в (6.68), получаем матричную передаточную функцию:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2+3p+2} & \frac{1}{p^2+3p+2} & 0 \\ -\frac{2}{p^2+3p+2} & \frac{p}{p^2+3p+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{2}{p+1} \\ \frac{1}{p^2+3p+2} & \frac{1}{p+2} \end{bmatrix}. \tag{6.70}
 \end{aligned}$$

Этот же результат можно было получить непосредственно из данной системы дифференциальных уравнений (6.61). Действительно, при нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned}
 py_1(p) + y_1(p) &= u_1(p) + 2u_2(p); \\
 p^2y_2(p) + 3py_2(p) + 2y_2(p) &= u_1(p) + u_2(p) + pu_2(p).
 \end{aligned}$$

Тогда из первого уравнения при  $u_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 py_1(p) + y_1(p) &= u_1(p) \text{ и} \\
 W_{11}(p) &= \frac{y_1(p)}{u_1(p)} = \frac{1}{p+1},
 \end{aligned}$$

при  $u_1 = 0$

$$\begin{aligned}
 py_1(p) + y_1(p) &= 2u_2(p) \text{ и} \\
 W_{12}(p) &= \frac{y_1(p)}{u_2(p)} = \frac{2}{p+1}.
 \end{aligned}$$

Из второго уравнения при  $u_2 = 0$

$$p^2y_2(p) + 3py_2(p) + 2y_2(p) = u_1(p) \text{ и}$$

$$W_{21}(p) = \frac{y_2(p)}{u_1(p)} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2},$$

при  $u_1 = 0$

$$p^2 y_2(p) + 3p y_2(p) + 2y_2(p) = u_2(p) + p u_2(p) \text{ и}$$

$$W_{22}(p) = \frac{p+1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p+2}.$$

Таким образом, получены все элементы матрицы  $W(p)$ . Вместе с тем, как будет показано ниже, использование преобразования Лапласа в ряде случаев может привести к неполным выводам.

К этому вопросу вернемся в п. 6.3 после введения таких существенных свойств системы автоматического управления как *наблюдаемость* и *управляемость*.

Для определения этих понятий требуется преобразовать стандартную форму в *нормальную форму* уравнений состояний. Это преобразование связано с необходимостью рассмотрения ряда дополнительных математических сведений, которые приведены в приложении ПЗ.

### 6.3. Нормальная форма уравнения состояний линейной стационарной системы

Стандартной формой уравнения состояний линейной стационарной системы являются выражения (6.59) и (6.60). При условии, что характеристические числа матрицы  $A$  различны, проведем преобразование стандартной формы к нормальной, используя рассмотренное в приложении 3 преобразование подобия. Пусть  $M$  — модальная матрица. Обозначим

$$X = MZ.$$

Подставим это выражение в уравнения (6.59) и (6.60) стандартной формы. Тогда

$$\begin{aligned} M\dot{Z} &= AMZ + BU; \\ Y &= CMZ + DU. \end{aligned}$$

Умножим обе части первого уравнения слева на матрицу  $M^{-1}$ , обратную модальной.

Учитывая, что  $M^{-1} = E$ , а  $E\dot{Z} = \dot{Z}$ , получим:

$$\dot{Z} = M^{-1}AMZ + M^{-1}BU.$$

В соответствии с (п. 3.20)

$$\dot{Z} = \Lambda Z + M^{-1}BU,$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица, элементы которой являются характеристическими числами матрицы  $A$ .

Отсюда *нормальная форма уравнений состояний* имеет вид:

$$\dot{Z} = \Lambda Z + B_H U, \quad (6.71)$$

$$Y = C_H Z + D_H U,$$

где  $B_H = M^{-1}B$ ;  $C_H = CM$ ;  $D_H = D$ .

Особенностью нормальной формы является то, что все дифференциальные уравнения «развязаны» относительно фазовых переменных (переменных состояния)  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Иначе, каждое из  $n$  дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $f_i$  — вынуждающая функция, действующая на  $i$ -ю фазовую переменную (переменную состояния).

Это наглядно видно, если записать уравнение (6.71) в развернутой форме:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + B_H \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} &= C_H \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + D_H \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (6.72)$$

В частном случае односвязной системы моделирующая схема уравнений состояний, полученных в нормальной форме, приведена на рис. 6.9.

Как указано в приложении 3, при наличии кратных корней характеристического уравнения квадратная матрица, вообще говоря, не преобразуется к диагональной форме. Вместе с тем случай кратных корней при моделировании в технической системе соответствует определенному сочетанию параметров этой системы. Учитывая, что в реальных условиях параметры технической системы задают с определенной погрешностью, случай различных корней характеристического уравнения является достаточно общим.

Уравнения состояний в нормальной форме дают возможность легко определить понятия *управляемости* и *наблюдаемости* системы [11].

Очевидно, что  $i$ -я фазовая переменная (переменная состояния) не управляема, если входные сигналы не оказывают на нее никакого воздействия. Это соответствует наличию нулевой  $i$ -й строки в матрице  $B_H$ . Неуправляемость  $i$ -й фазовой переменной означает, что ее изменение зависит от начальных условий и внешних возмущений и не зависит от сигнала управления.

Если изменение какой-либо фазовой переменной не влияет ни на один выход системы, то эта фазовая переменная ненаблюдаема. Наличие нулевого столбца в матрице  $C_H$ , делает систему ненаблюдаемой.

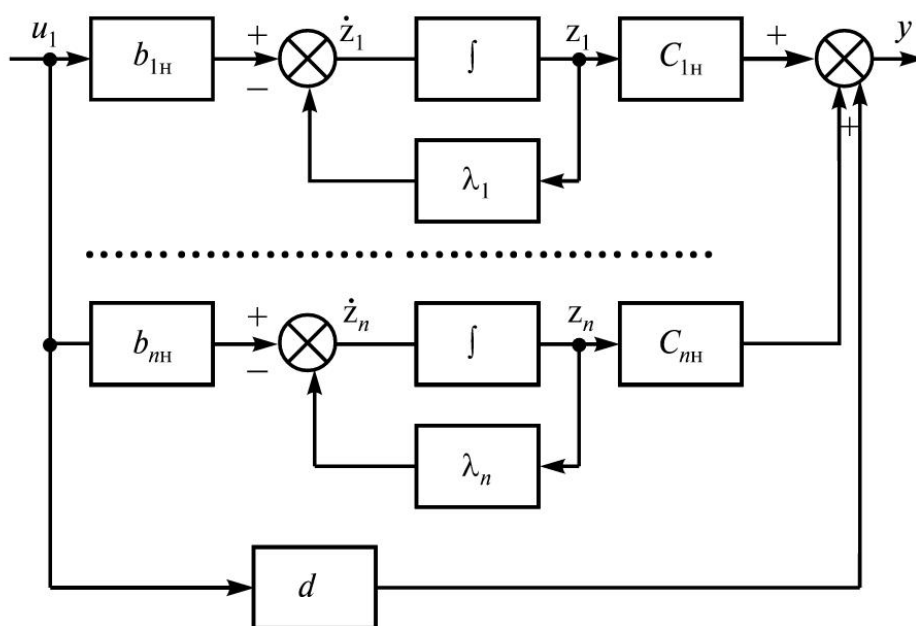


Рис. 6.9. Моделирующая схема уравнений состояний, полученных в нормальной форме

Условия полной наблюдаемости и управляемости, модель которой представлена в нормальной форме сводится к следующему: полная наблюдаемость — отсутствие нулевого столбца в матрице  $C_H$ , полная управляемость — отсутствие нулевой строки в матрице  $B_H$ .

**Пример 6.8**

Рассмотрим две линейные подсистемы. Модель первой подсистемы имеет вид:

$$\frac{dy_1}{dt} + y_1 = 2u_1 + \frac{du_1}{dt}.$$

Модель второй подсистемы:

$$\frac{dy_2}{dt} + 2y_2 = u_2.$$

В этих уравнениях  $u_1$  и  $u_2$  — сигналы управления,  $y_1$  и  $y_2$  — сигналы на выходе соответственно первой и второй системы.

Подсистемы объединены. Выход первой является входом второй, т.е.  $u_2 = y_1$ . Выход объединенной системы  $y = y_2 - y_1$ . Требуется определить, является ли объединенная система наблюдаемой и управляемой.

Перейдем вначале к уравнениям состояний для первой подсистемы. Моделирующая схема получается после разрешения уравнения системы относительно  $\dot{y}_1 - \dot{u}_1$ :  $\dot{y}_1 - \dot{u}_1 = -y_1 + 2u_1$ .

Тогда моделирующая схема имеет вид, приведенный на рис. 6.10.

Эта схема эквивалентна схеме, приведенной на рис. 6.11.

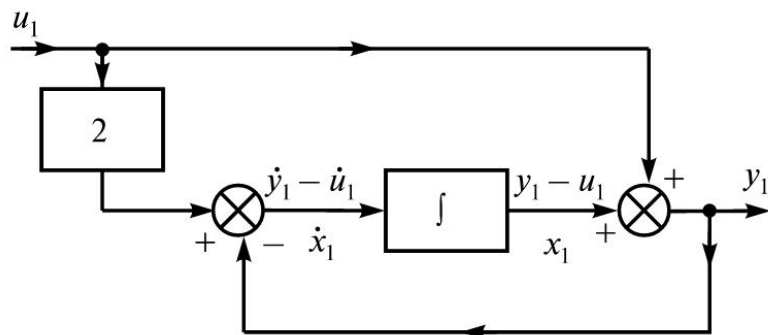


Рис. 6.10. Схема моделирования

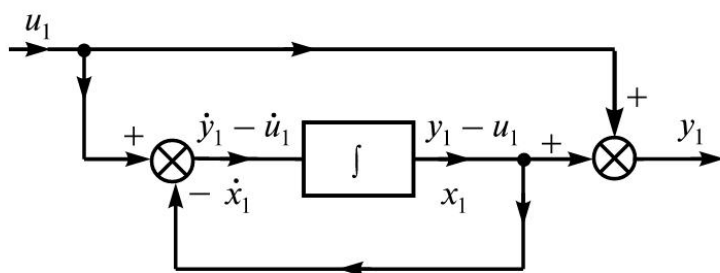
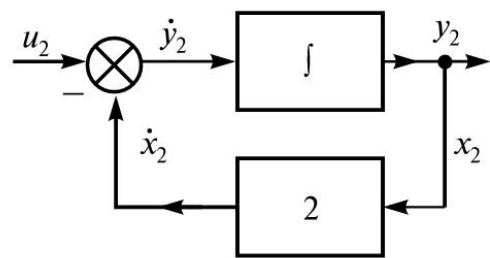


Рис. 6.11. Схема моделирования

Обозначим выход интегратора через  $x_1$ , при этом последнее уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u_1; \\ y_1 &= x_1 + u_1.\end{aligned}$$



Для второй подсистемы  $\dot{y}_2 = -2y_2 + u_2$  и моделирующая схема имеет вид, приведенный на рис 6.12.

Рис. 6.12. Схема моделирования

Обозначим выход интегратора через  $x_2$ , при этом уравнение состояний имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -2x_2 + u_2; \\ y_2 &= x_2.\end{aligned}$$

Объединим обе подсистемы, как это показано на рис. 6.13. Получим модель системы в форме уравнений состояний:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u_1; \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1 + u_1; \\ y &= x_2 - x_1 - u_1.\end{aligned}$$

В стандартной матричной форме:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1; \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1.\end{aligned}$$

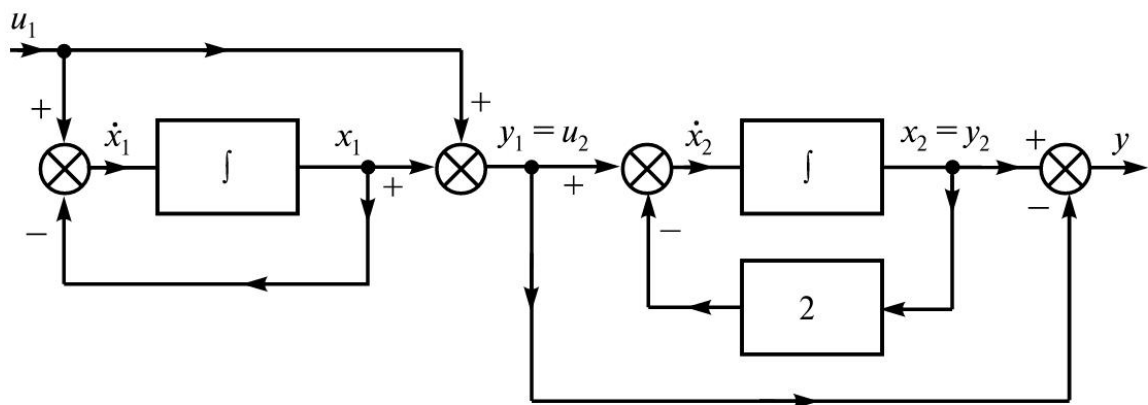


Рис. 6.13. Объединенная схема моделирования

Перейдем к нормальной форме. Определим вначале характеристические числа матрицы  $A$ :

$$\begin{vmatrix} (-1-\lambda_1) & 0 \\ 1 & (-2-\lambda_2) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $(1+\lambda_1)(2+\lambda_2) = 0$ .

Характеристические числа  $\lambda_1 = -1$ ;  $\lambda_2 = -2$ .

Присоединенная матрица

$$Adj[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix};$$

$$Adj[\lambda I - A]_{\lambda=\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Adj[\lambda I - A]_{\lambda=\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Модальная матрица

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M^{-1} = \frac{Adj M}{|M|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы

$$\begin{aligned} B_H &= M^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ C_H &= CM = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ D_H &= D = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица  $B_H$  содержит нулевую строку. Следовательно, объединенная система неуправляема. Матрица  $C_H$  содержит нулевой столбец. Следовательно, объединенная система ненаблюдаемая.

Таким образом, объединение систем, каждая из которых полностью наблюдаема и управляема, привело к ненаблюдаемой и неуправляемой системе.

Рассмотрим этот же пример, используя преобразование Лапласа. Передаточная функция первой подсистемы имеет вид:

$$W_1(p) = \frac{p+2}{p+1}.$$

Передаточная функция второй подсистемы

$$W_2(p) = \frac{1}{p+2}.$$

Изображение  $y(p)$  сигнала на выходе системы

$$\begin{aligned} y(p) &= y_2(p) - y_1(p) = W_2(p)u_1(p) - u_1(p) = \\ &= (W_2(p) - 1)W_1(p)u_1(p) = -\frac{p+1}{p+2} \cdot \frac{p+2}{p+1} u(p) = -u(p). \end{aligned}$$

Следовательно, передаточная функция объединенной системы равна  $-1$ . Этот результат получен потому, что были проведены сокращения в числителе и знаменателе передаточной функции. Корни многочлена числителя передаточной функции назовем «нулями». Корни многочлена знаменателя передаточной функции назовем «полюсами». Сокращение числителя и знаменателя передаточной функции на сомножители, в которые входят одинаковые нули и полюса, привело к результатам, не позволяющим анализировать процессы в системе.

Рассмотрим далее случай, когда не все корни характеристического уравнения различны, иначе — имеются кратные корни характеристического уравнения. Пусть преобразующая матрица  $T$  получена (см. приложение 3). Тогда, обозначив  $X = TZ$  и подставив это выражение в уравнение (6.59) и (6.60), получаем:

$$T\dot{Z} = ATZ + BU; \quad (6.73)$$

$$Y = CTY + DU. \quad (6.74)$$

Откуда, умножая слева обе части (6.73) на  $T^{-1}$ , учитывая, что  $T^{-1}T = I$ ,  $I\dot{Z} = \dot{Z}$ , а  $T^{-1}AT = J$  — жорданова нормальная форма матрицы  $A$  (см. приложение П3), получаем:

$$Z = JZ + B_H U; \quad (6.75)$$

$$Y = CX + DU, \quad (6.76)$$

где  $B_H = T^{-1}B$ ;  $C_H = CT$ .



Таким образом, при наличии кратных корней характеристического уравнения модель системы приводится к форме уравнений (6.75), (6.76), содержащей жорданову матрицу.

#### **6.4. Определение реакции линейной стационарной системы на заданный входной сигнал при использовании матричных моделей**

В этом пункте реакция системы на заданный входной сигнал будет определяться на основе использования математического аппарата теории матриц [12], в отличие от операторного метода (метода на основе преобразования Лапласа), описанного в п. 6.2.

Пусть модель системы, имеющей  $r$  входов и  $l$  выходов, определена в стандартной форме:

$$\dot{X} = AX + BU; \quad (6.77)$$

$$Y = CX + DU. \quad (6.78)$$

Квадратная матрица  $A$  имеет порядок  $n$ . Вектор-столбец входных сигналов задан:

$$U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{bmatrix},$$

где  $r \leq n$ .

Начальные условия заданы:

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix}.$$

Требуется определить реакцию этой системы в общем случае при ненулевых начальных условиях на заданные входные сигналы  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_r(t)$ , т.е. необходимо получить вектор-столбец:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_l(t) \end{vmatrix}.$$

Вектор  $Y$  в соответствии с уравнением (6.78) является линейной комбинацией векторов  $X$  и  $U$ . Следовательно,  $Y$  просто вычисляется при заданном  $U$ , если известен  $X$ . Поэтому решение задачи сводится к решению системы неоднородных дифференциальных уравнений (6.77) относительно  $X$  в общем случае при ненулевых начальных условиях.

Поставленную задачу будем решать двумя способами, первый из которых не использует понятия фундаментальной матрицы системы, второй — с помощью фундаментальной матрицы. Вторым способом будет описан в п. 6.5.

Решение неоднородного дифференциального уравнения определяется суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Общее решение однородного уравнения при ненулевых начальных условиях определяет свободную составляющую движения системы, частное решение — вынужденную составляющую.

Наметим план решения задачи первым способом:

- определим  $X(t)$  при различных характеристических числах матрицы  $A$  и ненулевых начальных условиях, когда входные сигналы отсутствуют. Иными словами, найдем свободную составляющую движения системы;

- преобразуем полученное выражение  $X(t)$  с учетом того, что  $2k \leq n$  корней характеристического уравнения могут быть комплексными;

- определим  $X(t)$  при различных характеристических числах матрицы  $A$ , ненулевых начальных условиях и заданных входных сигналах;

- определим  $X(t)$  при наличии кратных характеристических чисел, нулевых начальных условиях и заданном входном сигнале.

Отыскание  $X(t)$  при ненулевых начальных условиях и отсутствии входных сигналов сводится к решению системы однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = AX, \quad (6.79)$$

где

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

$A$  — квадратная матрица порядка  $n$  с элементами  $a_{ij}$ .

Решение системы уравнений будем искать в виде:

$$x_1 = m_1 e^{\lambda t}; \quad x_2 = m_2 e^{\lambda t}; \quad \dots; \quad x_n = m_n e^{\lambda t}. \quad (6.80)$$

Подставив (6.80) в (6.79), получаем:

$$\begin{bmatrix} m_1 \lambda \\ m_2 \lambda \\ \vdots \\ m_n \lambda \end{bmatrix} e^{\lambda t} = A \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} e^{\lambda t}. \quad (6.81)$$

Сокращая обе части этого уравнения на  $e^{\lambda t}$  и перенося все члены в одну сторону, получаем:

$$[\lambda I - A] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad [\lambda I - A] \cdot M = 0. \quad (6.82)$$

Условием нетривиального решения системы линейных уравнений (6.82) является равенство нулю определителя характеристической матрицы  $A$ . Пусть все корни характеристического уравнения (характеристические числа)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  действительны и различны. В этом случае система линейных однородных алгебраических уравнений (6.82) относительно неизвестных  $m_1, m_2, \dots, m_n$  для каждого  $\lambda_i$  имеет вид:

$$[\lambda_i I - A] \cdot m_i = 0, \quad (6.83)$$

где

$$m_i = \begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ \dots \\ m_{ni} \end{bmatrix},$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Решением этой системы являются столбцы модальной матрицы, каждый из которых получен при фиксированном  $\lambda_i$  (см. Пример ПЗ.2 приложения 3).

Пусть модальная матрица вычислена:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда решение системы дифференциальных уравнений (6.79) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ \vdots \\ m_{n2} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} m_{1n} \\ m_{2n} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{bmatrix} e^{\lambda_n t}, \quad (6.84)$$

т.е.

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ji} e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.85)$$

где  $\alpha_j$  — произвольные постоянные.

Полученное решение неоднозначно. Это связано с тем, что умножение столбцов модальной матрицы на постоянное число приводит к новым решениям системы однородных линейных уравнений. Коэффициенты  $\alpha_j$  могут быть найдены, если известны начальные условия:  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ . Тогда при  $t = 0$  из (6.84) следует:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ \vdots \\ m_{n2} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} m_{1n} \\ m_{2n} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{bmatrix}.$$

В более компактном виде

$$X(0) = M \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Умножив обе части этого выражения на  $M^{-1}$  — обратную модальную матрицу, получаем решение системы линейных уравнений относительно  $\alpha_i$ :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = M^{-1} X(0).$$

Откуда

$$\alpha_i = \langle r_i x(0) \rangle,$$

где  $r_i$  —  $i$ -я строка обратной модальной матрицы.

Подставив  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в (6.84), получим решение однородной системы линейных уравнений при ненулевых начальных условиях.

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \langle r_j x(0) \rangle m_{ij} e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.86)$$

В матричной форме

$$X = \sum_{j=1}^n \langle r_j X(0) \rangle m_j e^{\lambda_j t}, \quad (6.87)$$

где  $m_j$  —  $j$ -й вектор-столбец модальной матрицы.

Эти выражения в разных формах определяют свободную составляющую переходного процесса при заданных ненулевых начальных условиях.

**Пример 6.9**

Определить свободную составляющую движения системы, матрица  $A$  и начальные условия которой заданы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad x_1(0); \quad x_2(0).$$

Характеристическая матрица системы имеет вид:

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем характеристическое уравнение системы:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, получаем характеристические числа системы:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2.$$

Получаем далее модальную матрицу системы. Выпишем  $C_{ij}$  — соответствующие алгебраические дополнения матрицы  $[\lambda I - A]$ :

$$C_{11} = \lambda + 3; \quad C_{12} = -2; \quad C_{21} = 1; \quad C_{22} = \lambda.$$

Тогда присоединенная матрица

$$Adj[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

При  $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + 3 & 1 \\ -2 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

При  $\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 + 3 & 1 \\ -2 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Выбираем по одному столбцу из каждой присоединенной матрицы и получаем модальную матрицу  $M$ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную к модальной матрицу:

$$M^{-1} = \frac{AdjM}{|M|};$$

$$|M| = -2 + 1 = 1;$$

$$C_{11} = -2; C_{12} = 1; C_{21} = -1; C_{22} = 1;$$

$$AdjM = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем векторы  $r_1$  и  $r_2$ :

$$r_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Определяем слагаемые  $\langle r_j x(0) \rangle m_j e^{\lambda_j t}$  выражения (6.87):

$$\langle r_1 x(0) \rangle m_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 2x_1(0) + x_2(0) \\ -2x_1(0) - x_2(0) \end{bmatrix} e^{-t};$$

$$\langle r_2 x(0) \rangle m_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} -x_1(0) - x_2(0) \\ 2x_1(0) + 2x_2(0) \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Подставив эти выражения в (6.87), получаем:

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 2x_1(0) + x_2(0) \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} x_1(0) + x_2(0) \end{bmatrix} e^{-2t}; \quad (6.88)$$

$$x_2(t) = -[2x_1(0) + x_2(0)]e^{-t} + [2x_1(0) + 2x_2(0)]e^{-2t}. \quad (6.89)$$

Рассмотрим ряд частных случаев. Пусть вектор начальных условий совпадает по направлению с характеристическим вектором:

$$m_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ т.е. } \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

где  $\alpha$  — действительное число.

Тогда

$$x_1(0) = \alpha; x_2(0) = -\alpha.$$

Подставляя эти значения в (6.88) и (6.89), получаем:

$$x_1(t) = \alpha e^{-t};$$

$$x_2(t) = -\alpha e^{-t}.$$

При этих начальных условиях составляющая решения  $e^{-2t}$  ненаблюдаема.

Пусть далее вектор начальных условий совпадает по направлению с характеристическим вектором  $m_2$  системы, т.е.

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

где  $\beta$  — действительное число.

Тогда

$$x_1(0) = \beta; x_2(0) = -2\beta.$$

Подставляя эти значения в (6.88) и (6.89), получаем:

$$x_1(t) = \beta e^{-2t};$$

$$x_2(t) = -2\beta e^{-2t}.$$

В этом случае ненаблюдаема составляющая решения  $e^{-t}$ .

Если среди характеристических чисел имеются комплексно-сопряженные, например,  $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$  и  $\lambda_2 = \alpha_1 - j\beta_1$ , то, как уже указывалось в приложении ПЗ, характеристическому числу  $\lambda_1$  в первом столбце модальной матрицы соответствует вектор  $m_1 = m'_1 + jm''_1$ ,



где

$$m'_1 + jm''_1 = \begin{bmatrix} m'_{11} + jm''_{11} \\ m'_{21} + jm''_{21} \\ \dots \\ m'_{n1} + jm''_{n1} \end{bmatrix}.$$

Характеристическому числу  $\lambda_2$  во втором столбце модальной матрицы соответствует вектор  $m_2 = m'_2 + jm''_2$ .

Можно показать, что матрице  $M^{-1}$ , обратной модальной матрице  $M$ , вектора строки  $r_1$  и  $r_2$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}r'_1 + j\frac{1}{2}r''_1; \quad r_2 = \frac{1}{2}r'_2 + j\frac{1}{2}r''_2; \\ <r'_1 m'_1> = 1; \quad <r''_1 m'_1> = 0; \\ <r'_1 m''_1> = 0; \quad <r''_1 m''_1> = 1. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Получим далее свободную составляющую решения системы  $n$ -го порядка, имеющей  $k$  пар комплексных характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^*, \lambda_3, \lambda_4 = \lambda_3^*, \dots, \lambda_{2k-1}, \lambda_{2k} = \lambda_{2k-1}^*$  и  $(n - 2k)$  действительных:  $\lambda_{2k+1}, \lambda_{2k+2}, \dots, \lambda_n$ . Комплексные характеристические числа имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 + j\beta_1; \quad \lambda_2 = \alpha_1 - j\beta_1; \quad \lambda_3 = \alpha_2 + j\beta_2; \\ \lambda_4 &= \alpha_2 - j\beta_2; \quad \dots; \quad \lambda_{2k-1} = \alpha_k + j\beta_k; \quad \lambda_{2k} = \alpha_k - j\beta_k. \end{aligned}$$

После подстановки комплексных характеристических чисел в выражение (6.87) и алгебраических преобразований с учетом (6.90) получаем:

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{i=1}^k e^{\alpha_i t} \left\{ \left[ <r'_i X(0)> \cos \beta_i t + <r''_i X(0)> \sin \beta_i t \right] \cdot m'_i + \right. \\ &+ \left. \left[ <r''_i X(0)> \cos \beta_i t - <r'_i X(0)> \sin \beta_i t \right] \cdot m''_i \right\} + \sum_{i=2k+1}^n <r_i X(0)> e^{\lambda_i t} m_i. \end{aligned} \quad (6.91)$$

**Пример 6.10**

Определить свободную составляющую движения системы, заданной матрицей  $A$  и вектором начальных условий  $X(0)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица имеет вид:

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 2 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем характеристическое уравнение системы:

$$\lambda(\lambda + 2) + 2 = 0; \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Характеристические числа системы получаем из решения этого уравнения:

$$\lambda_1 = -1 + j; \quad \lambda_2 = -1 - j.$$

Присоединенная матрица системы:

$$\text{Adj}[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T,$$

где  $C_{ij}$  — соответствующие алгебраические дополнения;

$$C_{11} = 1 + 2; \quad C_{12} = -2; \quad C_{21} = 1; \quad C_{22} = 1.$$

Тогда

$$\text{Adj}[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

При  $\lambda_1 = -1 + j$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j & 1 \\ -2 & -1 + j \end{bmatrix}.$$

При  $\lambda_2 = -1 - j$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - j & 1 \\ -2 & -1 - j \end{bmatrix}.$$

Выбирая из каждой матрицы по столбцу с соответствующими комплексно-сопряженными элементами, получаем модальную матрицу:

$$M = \begin{bmatrix} 1 + j & 1 - j \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную модальную матрицу:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{M}| &= -2(1+j) - (-2)(1-j) = -4j; \\
 \text{Adj}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1+j & 1+j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -1+j \\ 2 & 1+j \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{M}^{-1} &= \frac{\text{Adj}\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} = -\frac{1}{4j} \begin{bmatrix} -2 & -1+j \\ 2 & 1+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}j & -\frac{1}{4}j - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}j & \frac{1}{4}j - \frac{1}{4} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Откуда

$$r_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}j \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j \end{bmatrix}; \quad r_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}j \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}j \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (6.90)

$$m'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad m''_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad r''_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & e^{\alpha_1 t} \left[ \langle r'_1 X(0) \rangle \cos \beta_1 t + \langle r''_1 X(0) \rangle \sin \beta_1 t \right] m'_1 = \\
 & = e^{-t} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \sin t \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \\
 & = e^{-t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} x_2(0) \cos t + \left[ x_1(0) + \frac{1}{2} x_2(0) \right] \sin t \\ x_2(0) \cos t - \left[ 2x_1(0) + x_2(0) \right] \sin t \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\alpha_1 t} \left[ \langle r_1'' X(0) \rangle \cos \beta_1 t - \langle r_1' X(0) \rangle \sin \beta_1 t \right] m_1'' = \\
& = e^{-t} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \sin t \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
& = e^{-t} \begin{bmatrix} x_1(0) \cos t + \frac{1}{2} x_2(0) \cos t + \frac{1}{2} x_2(0) \sin t \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (6.91), получаем:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-t} \left[ x_1(0) (\sin t + \cos t) + x_2(0) \sin t \right]; \\
x_2(t) &= e^{-t} \left[ x_2(0) (\cos t - \sin t) - 2x_1(0) \sin t \right].
\end{aligned}$$

Для решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений (6.77) преобразуем вначале составляющую ВU. В общем случае ВU — вектор-столбец с числом элементов не более  $n$ , каждый из которых является линейной комбинацией управляющих воздействий  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Очевидно, что

$$ВU = MM^{-1}ВU, \quad (6.92)$$

где М — модальная матрица системы.

Тогда

$$M^{-1}ВU = \begin{bmatrix} \langle r_1 ВU \rangle \\ \langle r_2 ВU \rangle \\ \dots \\ \langle r_n ВU \rangle \end{bmatrix}, \quad (6.93)$$

где  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  —  $i$ -я строка модальной обратной матрицы  $M^{-1}$ . Совокупность этих векторов, как указывалось выше, является двойственным базисом системы.

С учетом (6.92) и (6.93)

$$\begin{aligned} \text{BU} = \text{M} \begin{bmatrix} \langle r_1 \text{BU} \rangle \\ \langle r_2 \text{BU} \rangle \\ \dots \\ \langle r_n \text{BU} \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle r_1 \text{BU} \rangle \\ \langle r_2 \text{BU} \rangle \\ \dots \\ \langle r_n \text{BU} \rangle \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_{1i} \langle r_i \text{BU} \rangle \\ \sum_{i=1}^n m_{2i} \langle r_i \text{BU} \rangle \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n m_{ni} \langle r_i \text{BU} \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \langle r_i \text{BU} \rangle m_i, \end{aligned} \quad (6.94)$$

где  $m_{ij}$  — элемент модальной матрицы, стоящий в  $j$ -й строке и  $i$ -м столбце;  
 $m_i$  —  $i$ -й столбец модальной матрицы.

Подставив (6.94) в (6.77), получаем:

$$\dot{X} = AX + \sum_{i=1}^n \langle r_i \text{BU} \rangle m_i. \quad (6.95)$$

Решение этой системы неоднородных дифференциальных уравнений при ненулевых начальных условиях и различных характеристических числах матрицы  $A$  имеет вид:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \langle r_i X(0) \rangle e^{\lambda_i t} m_i + \int_0^t \sum_{i=1}^n \langle r_i \text{BU}(\tau) \rangle e^{\lambda_i(t-\tau)} m_i d\tau. \quad (6.96)$$

Здесь первое слагаемое совпадает с выражением (6.87) и определяет свободную составляющую движения системы. Второе слагаемое — интеграл свертки, определяющий вынужденную составляющую движения системы.

До сих пор не рассматривался случай кратных корней характеристического уравнения. При моделировании технических систем наличие кратных корней соответствует определенному набору параметров системы. Очевидно, что эти параметры в реальных условиях имеют разброс. Следовательно, случай кратных корней с технической точки зрения достаточно редкий. При использовании преобразований Лапласа решение дифференциальных уравнений при наличии кратных корней требует применения соответствующей формулы (3.13) преобразования изображения в оригинал. Для матричной формы уравнений (6.77) решение системы будем искать при наличии характеристических чисел  $\lambda_1$  кратности  $v$ ,  $\lambda_2$  кратности  $s$  остальных  $l$  характеристических чисел  $\lambda_3, \dots, \lambda_{c+2}$  кратности один. Очевидно, что  $v + s + c = n$ , где  $n$  — порядок системы. Вначале определим свободную составляющую переходного процесса. Решение задачи состоит из следующих шагов:

- введем линейное преобразование неизвестных  $X$  в  $Z$ ; при этом заданная система дифференциальных уравнений (6.77) изменится так, что матрица  $A$  приведется к жордановой нормальной форме  $J$ ;
- решим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $Z$ ;
- перейдем обратно от  $Z$  к  $X$  и получим общее решение заданной однородной системы дифференциальных уравнений;
- при заданных начальных условиях определим произвольные постоянные, входящие в решение.

Как известно из приложения 3, матрица  $A$  приводится к жордановой нормальной форме  $J$  путем линейного преобразования неизвестных в соответствии с выражением (3.19). Введем новые неизвестные  $Z$ :

$$X = TZ, \quad (6.97)$$

где  $T$  — преобразующая матрица, которая подробнее будет рассмотрена в п. 6.5.

Подставив (6.97) в заданную систему уравнений (6.77), (6.78), получаем:

$$T\dot{Z} = ATZ + BU. \quad (6.98)$$

$$Y = CTZ + DU. \quad (6.99)$$

Умножив слева обе части уравнения (6.99) на  $T^{-1}$  и обозначив  $CT = C_{\text{ж}}$ ;  $T^{-1}B = B_{\text{ж}}$ , записываем:

$$\dot{Z} = JZ + B_{\text{ж}} U; \quad (6.100)$$

$$Y = C_{\text{ж}} Z + DU, \quad (6.101)$$

где  $J = T^{-1}AT$  — жорданова нормальная форма матрицы  $A$  (см. приложение 3), которая имеет вид:

$$J = \left( \begin{array}{cccccc|cccccc|cccccc|} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 & & & \\ & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \lambda_4 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \lambda_{l+3} \end{array} \right) \quad (6.102)$$

Первая жорданова клетка размерности  $n$ , вторая —  $s$ , остальные  $c$  размерности один, что соответствует  $c$  различным характеристическим числам. Для определения свободной составляющей переходного процесса в системе автоматического управления рассмотрим систему однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{Z} = JZ. \quad (6.103)$$

В соответствии с видом матрицы  $J$  система (6.103) представляется тремя группами дифференциальных уравнений, независимых друг от друга.

Первая группа уравнений содержит неизвестные функции  $z_1, z_2, \dots, z_v$ . Уравнения этой группы в соответствии с (6.102) и (6.103) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + z_2; \\ \frac{dz_2}{dt} &= \lambda_1 z_2 + z_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dz_{v-1}}{dt} &= \lambda_1 z_{v-1} + z_v; \\ \frac{dz_v}{dt} &= \lambda_1 z_v. \end{aligned} \right\} \quad (6.104)$$

Вторая группа уравнений содержит неизвестные функции  $z_{v+1}, z_{v+2}, \dots, z_{v+s}$ . Уравнения этой группы аналогичны (6.104):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_{k+1}}{dt} &= \lambda_2 z_{k+1} + z_{k+2}; \\ \frac{dz_{v+2}}{dt} &= \lambda_2 z_{v+2} + z_{v+3}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dz_{v+s-1}}{dt} &= \lambda_2 z_{v+s-1} + z_{v+s}; \\ \frac{dz_{v+s}}{dt} &= \lambda_2 z_{v+s}. \end{aligned} \right\} \quad (6.105)$$

Третья группа уравнений содержит  $s$  функций от  $z_{v+s+1}$  до  $z_n$  включительно. Так как эта группа соответствует различным характеристическим числам матрицы  $A$ , то каждое из уравнений этой группы содержит только одну неизвестную функцию:

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_{\mu} z_i, \quad (6.106)$$

$$i = v + s + 1, v + s + 2, \mu = 3, 4, \dots, c + 3.$$



Начнем решение с первой группы уравнений. Введем новые переменные  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$  так, что

$$z_i = e^{\lambda_1 t} S_i.$$

Тогда группа уравнений (6.104) примет вид:

$$\frac{dS_1}{dt} = S_2; \quad \frac{dS_2}{dt} = S_3, \dots; \quad \frac{dS_{v-1}}{dt} = S_v; \quad \frac{dS_v}{dt} = 0.$$

В результате интегрирования этих уравнений в последовательности от  $S_k$  до  $S_1$  получим:

$$\begin{aligned} S_v &= C_1, \quad S_{v-1} = C_1 t + C_2, \dots; \\ S_2 &= C_1 \frac{t^{v-2}}{(v-2)!} + C_2 \frac{t^{v-3}}{(v-3)!} + \dots + C_{v-2} t + C_{v-1}; \\ S_1 &= C_1 \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} + C_2 \frac{t^{v-2}}{(v-2)!} + \dots + C_{v-1} t + C_v, \end{aligned}$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_v$  — постоянные интегрирования.

Возвращаясь к переменным,  $z_i$  будем иметь:

$$\begin{aligned} z_v &= C_1 e^{\lambda_1 t}; \quad z_{v-1} = e^{\lambda_1 t} (C_1 t + C_2), \dots; \\ z_1 &= e^{\lambda_1 t} \left[ C_1 \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} + C_2 \frac{t^{v-2}}{(v-2)!} + \dots + C_v \right]. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Решение второй группы уравнений аналогично. Результат решения этой группы уравнений отличается от (6.107) только тем, что  $\lambda_1$  заменяется на  $\lambda_2$ , нумерация  $z_i$  и  $C_i$  начинается с  $i = v + 1$  и заканчивается  $i = v + s$ . Функции  $\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}$  заменяются на  $\frac{t^{v-j}}{(s-j)!}$ , где  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Рассмотрим решение любого уравнения из третьей группы. Из (6.106) следует, что

$$\frac{dz_i}{z_i} = \lambda_m dt.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \ln z_i &= \lambda_m t + C_i^*, \\ z_i &= e^{\lambda_m t + C_i^*} = C_i e^{\lambda_m t}, \end{aligned}$$

где  $C_i = e^{C_i^*}$  — постоянная интегрирования;

$$i = v + s + 1, v + s + 2, \dots, n; m = 3, 4, \dots, c + 3 \dots$$

На этом этапе получено общее решение однородной системы дифференциальных уравнений относительно функции  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Выражения исходных фазовых переменных  $x_i$  получаем как линейную комбинацию функций  $z_i$  в соответствии с выражением (6.97). Постоянные интегрирования определяются при известных начальных условиях  $x_i(0)$  из системы линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \dots \\ z_n(0) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix}.$$

Свободная составляющая переходного процесса на выходе системы получается как линейная комбинация функций  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  в соответствии с уравнением  $Y = CX$  либо  $Y = CTZ = C_{\text{ж}}Z$ .

Для определения реакции системы на заданный входной сигнал найдем решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (6.100). В правой части этого уравнения произведение матрицы  $B_{\text{ж}} = BT$  на вектор-столбец управлений  $U$ :

$$B_{\text{ж}} U = \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & \dots & b_{1n}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & \dots & b_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}^* & b_{n2}^* & \dots & b_{nn}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \dots \\ u_n^* \end{bmatrix},$$

где  $u_i^* = \langle b_{i1}^* \ b_{i2}^* \ \dots \ b_{in}^* \rangle (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В правой части каждого дифференциального уравнения групп уравнений (6.104), (6.105) и (6.106) дополнительно появляется соответствующее слагаемое  $u_i^*$ . Для первой группы  $i = 1, 2, \dots, v$ ; для второй —  $i = v + 1, v + 2, \dots, v + s$ ; для третьей —  $i = v + s + 1, v + s + 2, \dots, n$ . Непосредственной подстановкой можно проверить, что частным решением системы дифференциальных уравнений первой группы является:

$$z_v = \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} u_v^*(\tau) d\tau; \quad z_{v-1} = \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} (t-\tau) u_{v-1}^*(\tau) d\tau, \dots;$$

$$z_1 = \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(v-1)!} u_1^*(\tau) d\tau. \quad (6.108)$$

Решение второй группы уравнений аналогично. Результат отличается только тем, что  $\lambda_1$  заменяется на  $\lambda_2$ , нумерация  $z_i$  начинается с  $i = v + 1$  и заканчивается  $i = v + s$ , функция  $\frac{t^{v-j}}{(v-j)!}$  заменяется на  $\frac{t^{s-j}}{(s-j)!}$ , где  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Частное решение любого уравнения из третьей группы имеет вид:

$$z_i = \int_0^t e^{\lambda_m(t-\tau)} u_i^*(\tau) d\tau,$$

$$i = v + s + 1, v + s + 2, \dots, n; \quad m = 3, 4, \dots, c + 3.$$

Переход к фазовым переменным  $x_i$  осуществляется в соответствии с выражением (6.97). Сигналы на выходе системы определяются в соответствии с (6.99). Результатом решения системы является реакция системы, характеристическое уравнение модели которой содержит кратные корни, на совокупность заданных входных сигналов.

## 6.5. Определение реакции САУ на заданный входной сигнал при использовании фундаментальной матрицы

Прежде чем приступить к решению задачи — определению реакции линейной стационарной системы на заданный входной сигнал, введем понятие показательной функции от матрицы [12]. Обозначим эту функцию  $e^H$ , где  $H$  — матрица порядка  $n$ . Известно разложение функции  $e^x$  в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Откуда

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \dots$$

Определим функцию  $e^H$  через разложение ее в ряд Маклорена:

$$e^H = E + \frac{H}{1!} + \frac{H^2}{2!} + \dots + \frac{H^k}{k!} + \dots; \quad (6.109)$$

$$e^{-H} = E - \frac{H}{1!} + \frac{H^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k H^k}{k!} + \dots, \quad (6.110)$$

где  $E$  — единичная матрица размером  $n$ .

Производная от экспоненциальной функции  $e^{Ht}$  по  $t$  находят почленным дифференцированием (6.109):

$$\frac{d}{dt} e^{Ht} = H + H^2 t + \frac{H^3 t^2}{2!} + \dots = H e^{Ht} = e^{Ht} H. \quad (6.111)$$

Несложно показать, что

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{Ht} = H^k e^{Ht} = e^{Ht} H^k. \quad (6.112)$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного. Системе неоднородных дифференциальных уравнений, заданных в матричной форме уравнениями 1-го порядка (6.77), соответствует однородное уравнение вида:

$$\dot{X} = AX. \quad (6.113)$$

Общее решение этого уравнения подобно решению скалярного однородного уравнения первого порядка будем искать в виде  $e^{At}C^*$ , где  $C^*$  — вектор-столбец произвольных постоянных. После подстановки  $e^{At}C^*$  в (6.113) получаем:

$$e^{At}AC^* = Ae^{At}C^*. \quad (6.114)$$

Так как в соответствии с (6.111)  $e^{At}A = Ae^{At}$ , то выражение (6.114) является тождеством, и общее решение однородного дифференциального уравнения (6.114) имеет вид

$$X_0(t) = e^{At}C^*.$$

При  $t = 0$

$$X_0(0) = C^*.$$

Откуда следует, что  $C^*$  — вектор-столбец начальных значений и

$$X_0(t) = e^{At}X_0(0). \quad (6.115)$$

Если известны значения  $X$  в момент  $t_0$ , то

$$X_0(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) \text{ при } t \geq t_0. \quad (6.116)$$

Матрица  $\Theta(t) = e^{At}$  называется *фундаментальной* или *переходной* матрицей состояний системы (6.113). Частное решение системы дифференциальных уравнений (6.77) при  $t \geq t_0$  будем искать в виде:

$$X_{\text{част}}(t) = \Theta(t - t_0)F(t)X(t_0), \quad (6.117)$$

где  $F(t_0) = 0$ .

Подставив (6.117) в (6.77), получаем:

$$\Theta(t - t_0)F(t)X(t_0) + \Theta(t - t_0)\dot{F}(t)X(t_0) = A\Theta(t - t_0)F(t)X(t_0) + BU(t).$$

Откуда

$$[\Theta(t - t_0) - A\Theta(t - t_0)]F(t)X(t_0) + \Theta(t - t_0)\dot{F}(t)X(t_0) = BU(t). \quad (6.118)$$

Так как  $\Theta(t - t_0)$  является решением матричного уравнения (6.113), то  $[\Theta(t - t_0) - A\Theta(t - t_0)]$  — нулевая матрица и, следовательно,

$$\Theta(t - t_0)\dot{F}(t)X(t_0) = BU(t).$$

Умножив левую и правую часть этого уравнения на матрицу  $\Theta^{-1}(t - t_0)$ , получаем:

$$\dot{F}(t)X(t_0) = \Theta^{-1}(t - t_0)BU(t).$$

Отсюда

$$F(t)X(t_0) = \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(\lambda - t_0)BU(\lambda)d\lambda. \quad (6.119)$$

Подставив (6.119) в (6.117), получим частное решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} X_{\text{част}}(t) &= \Theta(t - t_0) \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(\lambda - t_0)BU(\lambda)d\lambda = \\ &= \int_{t_0}^t \Theta(\lambda - t_0)\Theta^{-1}(\lambda - t_0)BU(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \quad (6.120)$$

В соответствии с определением фундаментальной матрицы

$$\Theta(t - t_0)\Theta^{-1}(\lambda - t_0) = e^{A(t - t_0)}e^{-A(\lambda - t_0)} = e^{A(t - \lambda)} = \Theta(t - \lambda).$$

Следовательно,

$$X(t) = \Theta(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Theta(t - \lambda)BU(\lambda)d\lambda, \quad t \geq t_0, \quad (6.121)$$

где первое слагаемое — свободная составляющая, второе — вынужденная составляющая решения системы уравнений (6.77).

Решение неоднородного матричного дифференциального уравнения можно представить в несколько иной форме. Сложив общее решение однородного дифференциального уравнения (6.113) с частным решением неоднородного в виде (6.120), получаем:

$$\begin{aligned} X(t) &= \Theta(t - t_0) \left[ X(t_0) + \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(\lambda - t_0)BU(\lambda)d\lambda \right] = \\ &= e^{A(t-t_0)} \left[ X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\lambda-t_0)}BU(\lambda)d\lambda \right], \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Эта форма решения будет использована в дальнейшем при рассмотрении импульсных систем.

Подставив (6.121) в (6.78), получаем вектор-столбец сигналов на выходе системы:

$$Y(t) = C\Theta(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t C\Theta(t - \lambda)BU(\lambda)d\lambda + DU(t). \quad (6.123)$$

В иной форме  $Y(t)$  получаем при подстановке (6.122) в (6.78).

Решение системы линейных дифференциальных уравнений при использовании фундаментальной матрицы в отличие от рассмотренных ранее методов не требует знания характеристических чисел системы. По существу приведено решение в виде сходящихся степенных рядов матриц.

## Глава 7. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

### 7.1. Импульсные методы модуляции

Импульсными системами в соответствии с классификацией систем управления, проведенной в главе 2, будем называть системы, в которых циркулируют сигналы, подвергнутые одному из видов импульсной модуляции [5, 15, 16, 41].

Дискретным называется сигнал, определенный только для последовательности дискретных значений независимой переменной  $t$ . Во многих системах управления моменты времени, в которые определен сигнал, равно отстоят друг от друга на временной интервал  $T$  и обозначаются  $t = t_0 + nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В этом случае сигнал зависит от дискретной независимой переменной  $n$ . Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется временной дискретизацией. Примеры дискретных сигналов приведены на рис. 7.1.

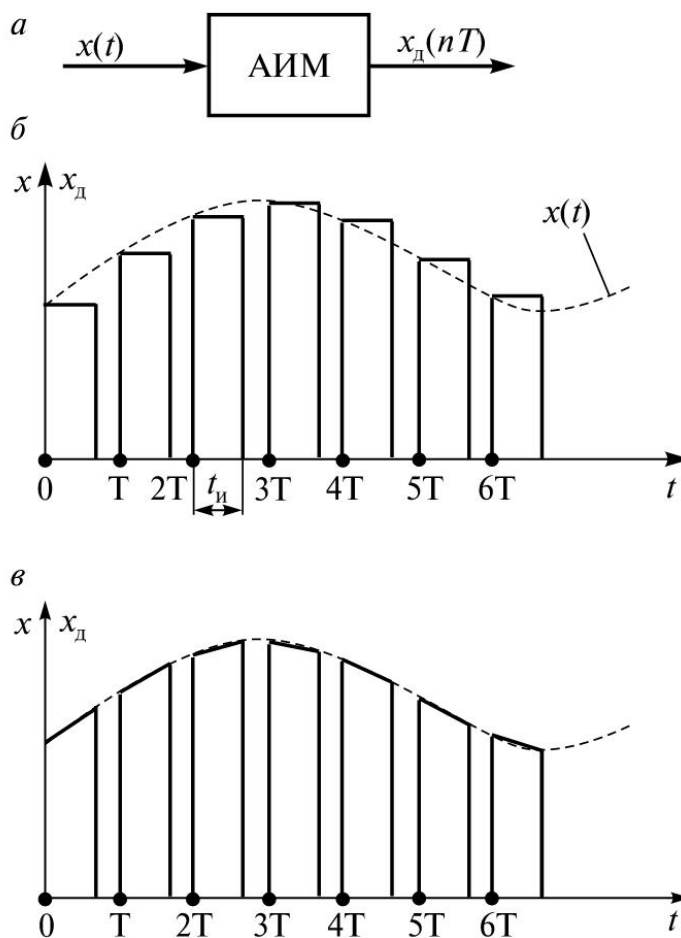


Рис. 7.1. Примеры дискретных сигналов:  $a$  — амплитудно-импульсный модулятор;  $б$  — амплитудно-импульсная модуляция I-го рода;  $в$  — амплитудно-импульсная модуляция II-го рода



Здесь непрерывный сигнал  $x(t)$ , показанный пунктирной линией, подвергнут временной дискретизации путем использования амплитудно-импульсной модуляции (АИМ). На вход амплитудно-импульсного модулятора (см. рис. 7.1, *а*) поступает непрерывный сигнал  $x(t)$ , на выходе — дискретизированный сигнал  $x_d(nT)$ , состоящий из последовательности импульсов, амплитуда которых пропорциональна значению  $x(t)$  в моменты времени  $t = t_0 + nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  На рис. 7.1, *б* приведено использование амплитудно-импульсного модулятора (и следовательно, модуляции I рода): на выходе модулятора — прямоугольные импульсы, амплитуда которых равна значению  $x(t)$  в моменты времени  $t = t_0 + nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  При АИМ второго рода вершины импульсов повторяют форму сигнала  $x(t)$  так, как это показано на рис. 7.1, *в*.

Временная дискретизация реализуется также путем использования иных способов импульсной модуляции. В частности, в системах автоматического управления э.п.с. применяется широтно-импульсная модуляция (ШИМ). При этом виде модуляции информация о значении непрерывного сигнала формируется в дискретные моменты времени и определяется длительностью («шириной») прямоугольного импульса. Существует множество способов реализации ШИМ. На э.п.с. обычно применяют интегральную широтно-импульсную модуляцию (ИШИМ) и ШИМ с линейной разверткой. Преобразователи непрерывного сигнала  $x(t)$  в последовательность импульсов, длительность которых несет информацию о сигнале  $x(t)$ , называют широтно-импульсными модуляторами. Способ построения модуляторов однозначно определяет математическую модель преобразования.

**Широтно-импульсные модуляторы с линейной разверткой.** Структурная схема широтно-импульсного модулятора с линейной разверткой представлена на рис. 7.2, *а*. Она состоит из следующих элементов: генератора пилообразного напряжения ГПН, порогового устройства ПУ, срабатывающего, когда напряжение  $u_{ГПН}$  на выходе ГПН равно напряжению входного сигнала  $x(t)$ , триггера-формирователя ТФ, осуществляющего формирование модулированного импульса.

Триггер перебрасывается в состояние 0 при срабатывании ПУ и в 1 на обратном фронте импульса ГПН. Из временной диаграммы, иллюстрирующей работу ШИМ с линейной разверткой (рис. 7.2, *б*), следует:

$$x(t_i) = \frac{A[t_i - (i-1)T]}{T},$$

где  $A$  — амплитуда пилообразного импульса;

$t_i$  —  $i$ -й момент времени, в который выполняется равенство  $x(t) = u_{\text{ГПН}}$ ;

$T$  — период следования этих импульсов;

$i$  — номер импульса.

Выражение в квадратных скобках представляет собой длительность прямоугольного импульса на выходе ШИМ:  $t_i - (i-1)T = t_{\text{и}i}$ .

Поэтому можно записать:

$$t_{\text{и}i} = \frac{Tx(t_i)}{A}. \quad (7.1)$$

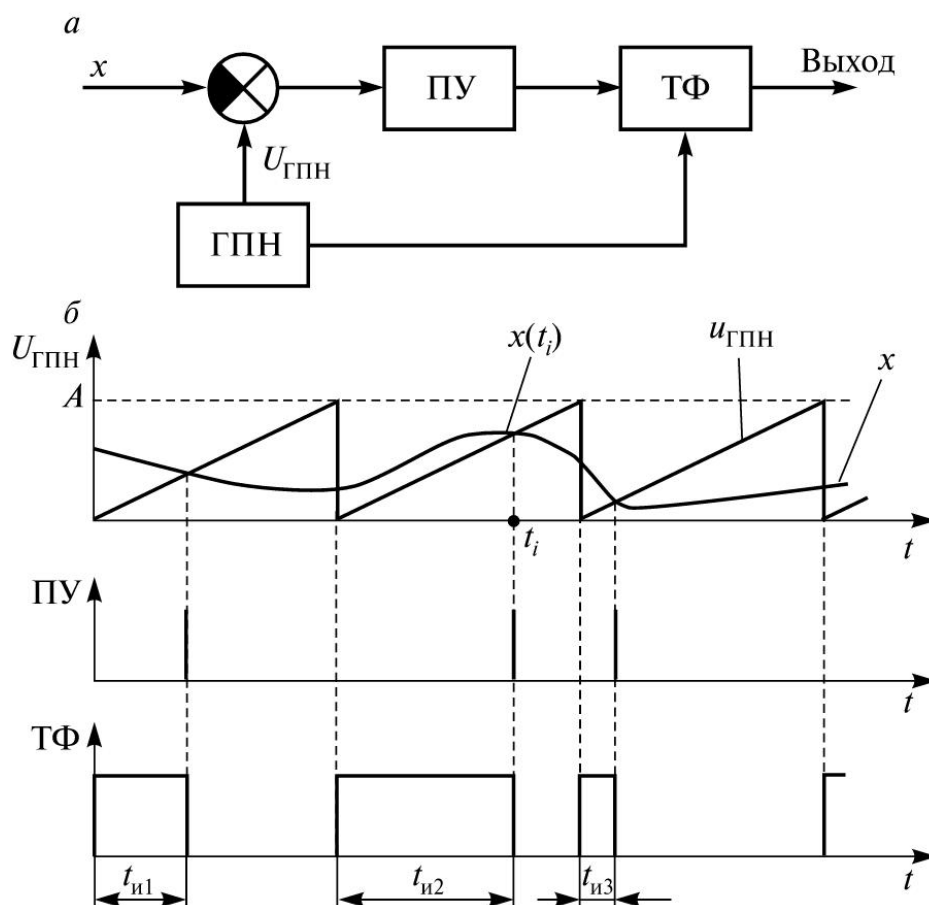


Рис. 7.2. Структурная схема время-импульсного модулятора с линейной разверткой (а) и временная диаграмма его работы (б)

Отсюда следует, что длительность импульса на выходе ШИМ с линейной разверткой пропорциональна мгновенному значению непрерывного сигнала в момент окончания импульса.

Условие  $x(t) > 0$  не является ограничением, так как при  $-B_1 \leq x \leq B_2$  на вход модулятора может быть подано постоянное положительное смещение  $U_{см} > |B_1|$ . При этом

$$t_{и_i} = \frac{T}{A} [x(t_i) + U_{см}] = t_{и0} + \frac{T}{A} x(t_i), \quad (7.2)$$

где  $t_{и0} = \frac{T U_{см}}{A}$ .

Из описания принципа действия ШИМ следует, что необходимо одно пересечение модулирующего сигнала с пилообразным напряжением. Это накладывает ограничение на максимальную скорость изменения  $V_{max}$  входного сигнала:  $V_{max} < V_{п}$ , где  $V_{п}$  — скорость изменения пилообразного напряжения.

**Широтно-импульсные модуляторы с интегральной широтно-импульсной модуляцией.** Такой модулятор (рис. 7.3) содержит интегратор  $\int$ , фиксирующее устройство ФУ и устройство управления УУ ключами К1 — К3.

На первом такте преобразования за образцовое время  $t_{об}$  происходит интегрирование модулирующего сигнала  $x \geq 0$  (ключ К1 замкнут, ключи К2 и К3 разомкнуты). В начале следующего такта на вход интегратора подается опорное напряжение  $U_{оп}$ , имеющее знак, противоположный  $x$  (ключ К1 разомкнут, ключи К2 и К3 замкнуты).

Процесс интегрирования длится до тех пор, пока значение интеграла не станет равным нулю. Фиксацию этого времени  $t_{и}$  и формирование импульса соответствующей длительности осуществляет ФУ.

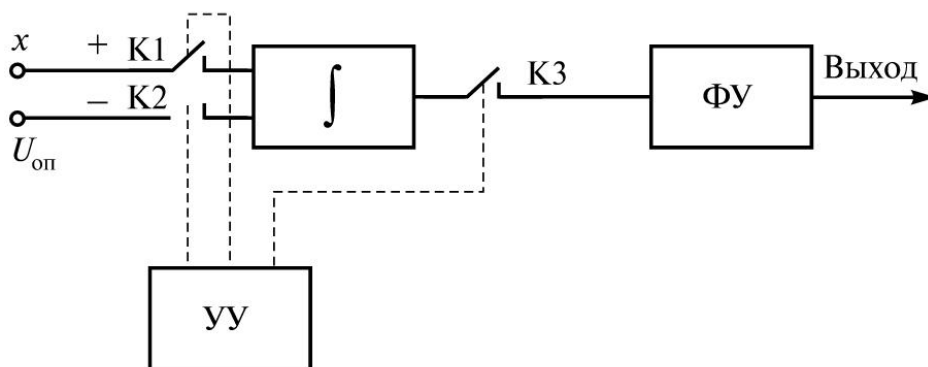


Рис. 7.3. Схема широтно-импульсного модулятора, осуществляющего интегральную широтно-импульсную модуляцию

Определим зависимость между длительностью импульса и значением непрерывного сигнала. В соответствии с алгоритмом работы ШИМ

$$\int_0^{t_{об}} x(t) dt - \int_0^{t_{и}} U_{оп} d\tau = 0,$$

где  $0 \leq t \leq t_{об}$ ,  $0 \leq \tau \leq t_{и}$ ,

откуда

$$U_{оп} t_{и} = \int_0^{t_{об}} x(t) dt = x_{ср} t_{об}, \quad t_{и} = \frac{t_{об} x_{ср}}{U_{оп}}, \quad (7.3)$$

где  $x_{ср}$  — среднее значение непрерывного сигнала за время  $t_{об}$ .

Отсюда следует, что длительность импульса на выходе ШИМ с интегральной широтно-импульсной модуляцией пропорциональна среднему значению модулирующей функции за время интегрирования.

При  $-B_1 \leq x \leq B_2$  так же, как и для ШИМ с линейной разверткой, на вход модулятора подается постоянное смещение  $U_{см} > |B_1|$ . Тогда

$$t_{и} = \frac{t_{об}}{U_{оп}} x_{ср} + \frac{t_{об}}{U_{оп}} U_{см} = \frac{t_{об}}{U_{оп}} x_{ср} + t_{и0}, \quad (7.4)$$

где  $t_{и0} = \frac{t_{об}}{U_{оп}} U_{см}$ .

Если процесс интегрирования сигнала на входе ШИМ начинается сразу же после окончания формирования импульса, то период работы модулятора  $T = t_{и} + t_{об}$  не постоянен, причем значение  $t_{и}$  зависит от вида модулирующей функции. В этом случае широтно-импульсной модуляции сопутствует паразитная частотно-импульсная модуляция — изменение периода следования импульсов в зависимости от сигнала  $x(t)$ . При работе ШИМ с внешней синхронизацией, когда процесс интегрирования входного сигнала начинается через равные промежутки времени  $T$ , величина которых должна превышать  $t_{и \max} + t_{об}$ , частотно-импульсная модуляция отсутствует.

В системах с частотными датчиками, в частности, в трактах измерения пути, пройденного поездом, и его скорости широко исполь-

зуется частотно-импульсная модуляция (ЧИМ), в которой, как указывалось выше, длительность периода следования импульсов зависит от модулирующего сигнала  $x(t)$ . Модуляторы ЧИМ строятся таким образом, чтобы период следования импульсов был обратно пропорционален величине  $x$ . При этом частота следования импульсов линейно зависит от  $x$ . Очевидно, что при этом способе модуляции дискретизация по времени непрерывного сигнала происходит с переменным шагом.

В системах с импульсными видами модуляций АИМ, ШИМ, ЧИМ сигнал на выходе модулятора так же, как и непрерывный сигнал, может принимать бесконечное множество значений. Сигналы, принимающие бесконечное множество значений, называют *аналоговыми*.

Развитие вычислительной техники привело к широкому использованию цифровых систем управления. В цифровых системах аналоговый сигнал преобразуется в цифровую форму с помощью АЦП. На вход АЦП поступает аналоговый сигнал, имеющий бесконечное множество значений, на выходе АЦП получаем сигнал, определяющий двоичный код фиксированной разрядности  $n$ . Следовательно, число различных состояний на выходе  $n$ -разрядного АЦП конечно и равно  $2^n$ . Преобразование аналогового сигнала, имеющего бесконечное множество значений, в сигнал с конечным множеством значений, называют *квантованием по уровню* (или просто квантованием) [5]. Операция квантования связана с округлением непрерывной величины. Модель идеального квантования (рис. 7.4, а) представляется в виде нелинейного элемента (НЭ), для которого зависимость выходной величины  $x_{\text{вых}}$  от входной  $x_{\text{вх}}$  имеет вид, приведенный на рис. 7.4. Погрешность квантования  $\Delta = x_{\text{вых}} - x_{\text{вх}}$ .

Если нелинейный элемент округляет аналоговый сигнал  $x_{\text{вх}}$  в соответствии с характеристиками, приведенными на рис. 7.4, б и в, то максимальная погрешность квантования равна  $q$  — шагу квантования по уровню. В том случае, когда округление реализуется нелинейным элементом, имеющим характеристику, симметричную относительно оси ординат (см. рис. 7.4, г), максимальное значение погрешности определяется величиной  $q/2$ . Эту характеристику можно принять за базовую, так как она уменьшает вдвое максимальную методическую погрешность и может быть получена из первых двух путем додачи на вход НЭ постоянного смещения, равного соответственно  $\pm q/2$ .

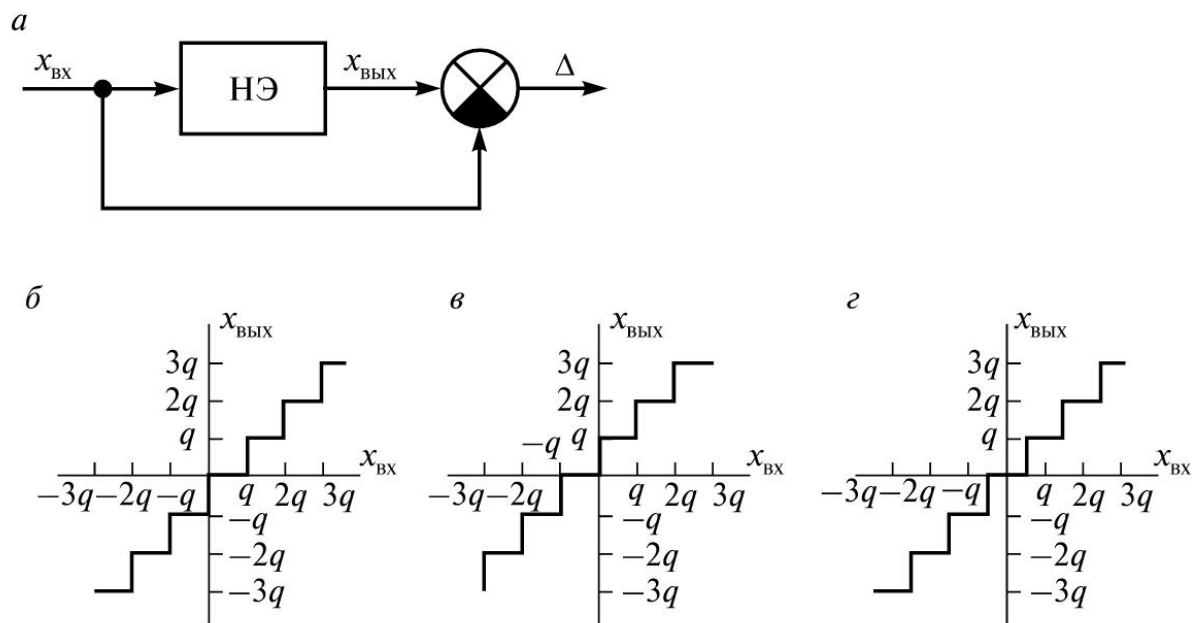


Рис. 7.4. Модель квантующего устройства (а); характеристики идеального квантующего устройства (б, в, г)

Погрешность квантования по уровню для базовой характеристики НЭ функционально связана с входной величиной в соответствии с рис. 7.4, г следующим образом:

$$\Delta = kq - x_{\text{ВХ}} \text{ при } kq - 0,5q \leq x_{\text{ВХ}} \leq kq + 0,5q, \quad (7.5)$$

где  $k$  — номер интервала квантования.

Рассмотренные характеристики НЭ имеют постоянный шаг квантования по уровню. В общем случае это необязательно.

В цифровых системах управления непрерывный сигнал подвергается временной дискретизации и квантованию по уровню. В соответствии с изложенным выше операция квантования нелинейна. В тоже время, процесс временной дискретизации, как будет показано в п. 8.2, может быть описан линейным оператором. Поэтому в данной книге термин «квантование по времени», иногда применяемый в технический литературе, не используется.

Входной сигнал объекта управления, как правило, является аналоговым. Поэтому дискретизированный по времени и квантованный по уровню сигнал на выходе цифрового устройства управления должен быть преобразован в аналоговый. Это преобразование называют *восстановлением*. Операция восстановления реализуется цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП).



Таким образом, по виду сигнала системы автоматического управления могут быть непрерывными, импульсными и цифровыми.

В состав системы управления входят, как правило, инерционные элементы. Математические модели, описывающие процессы в этих элементах, базируются на законах физики. Поэтому модель САУ содержит в общем случае систему интегро-дифференциальных и алгебраических уравнений. Так, при моделировании электрических цепей, динамики локомотива, используются обыкновенные дифференциальные уравнения. При моделировании процессов в системах с распределенными параметрами (например, распространение волны воздуха в тормозной системе поезда; переходные процессы в длинных линиях) используются дифференциальные уравнения в частных производных. Моделирование процессов в цифровых управляющих устройствах систем может быть осуществлено на базе так называемых разностных уравнений. В данной книге будут рассматриваться модели на основе обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений.

## **7.2. Модели разомкнутых импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией**

Построение моделей этих систем начнем с рассмотрения систем с амплитудно-импульсной модуляцией первого рода (АИМ I) [6]. Поставим задачу, которая позволит в дальнейшем построить модель линейной разомкнутой импульсной системы. Пусть требуется определить реакцию  $x_{\text{вых}}$  непрерывной линейной системы, заданной передаточной функцией  $W(p)$ , на последовательность  $x_{\text{вх}}^*$  прямоугольных импульсов длительностью  $t_{\text{и}}$ , следующих друг за другом через равные промежутки времени  $T > t_{\text{и}}$ . Амплитуда этих импульсов пропорциональна значениям моделирующей функции  $x_{\text{вх}}(t)$  в момент времени  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 7.5).

Формализуем эту задачу. Вначале опишем процесс амплитудно-импульсной модуляции — преобразование сигнала  $x_{\text{вх}}(t)$  в  $x_{\text{вх}}^*$ , где  $x_{\text{вх}}^*$  — последовательность импульсов (в данном примере прямоугольной формы), амплитуда которых равна значению моделирующей функции  $x_{\text{вх}}(t)$  при  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , т.е.  $x_{\text{вх}}[nt]$ .

Рассмотрим множительное устройство (рис. 7.6), на один вход которого подается сигнал  $x_{\text{вх}}(t)$ , на второй — последовательность  $\delta$ -фун-

кций с шагом следования  $T$ , т.е. сигнал  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ . На выходе множительного устройства получаем результат  $x_{\text{ВХ}}^* = x_{\text{ВХ}}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ ,

называемый *решетчатой функцией* и представляющий последовательность  $\delta$ -функций  $\delta(0), \delta(T), \delta(2T), \dots$ , веса (коэффициенты) которых определяются значениями функции  $x_{\text{ВХ}}(t)$  в момент  $t = nT$ . По существу, проведена временная дискретизация непрерывного сигнала  $x_{\text{ВХ}}(t)$  с шагом  $T$ . В теории управления принято элемент, преобразующий функцию непрерывного времени  $t$  в решетчатую функцию, называть *идеальным импульсным элементом* ИЭ (см. рис. 7.6, б).

Сигнал на выходе ИЭ

$$y[nT] = x_{\text{ВХ}}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (7.6)$$

поэтому идеальный импульсный элемент является моделью временной дискретизации непрерывного сигнала. Выражение (7.6) определяет оператор, преобразующий непрерывный сигнал  $x_{\text{ВХ}}(t)$  в дискретизированный по времени сигнал  $y[nT]$ . Это преобразование является линейным.

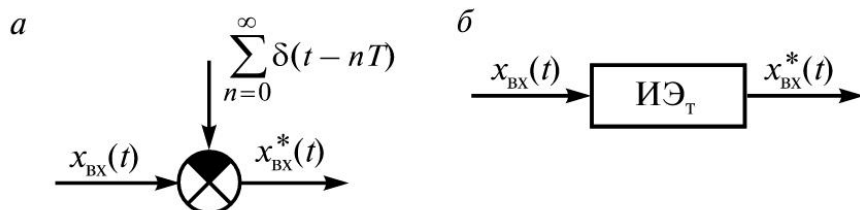


Рис. 7.6. Модель преобразования непрерывной функции в решетчатую (а); идеальный импульсный элемент (б)

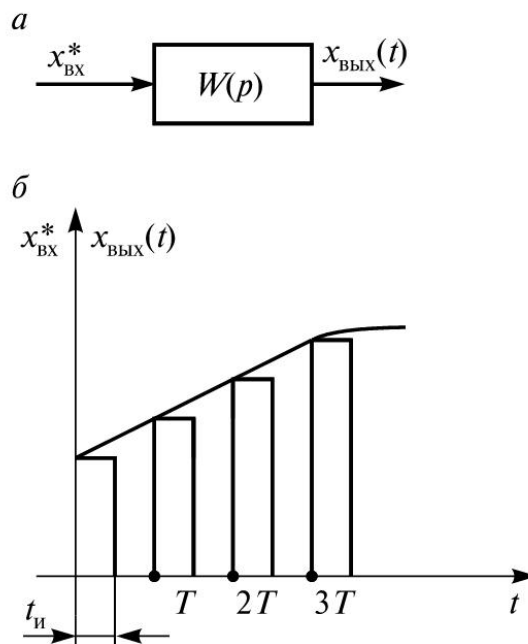


Рис. 7.5. Линейная система (а), на входе которой последовательность прямоугольных импульсов (б), модулированных по амплитуде



Действительно, если  $x_{\text{вх}}(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , то в соответствии с (7.6)

$$[x_1(t) + x_2(t)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = x_1(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) + x_2(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Если  $x_{\text{вх}}(t) = cx_1(t)$ , то  $[cx_1(t)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = c[x_1(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)]$ .

В соответствии с определением линейной системы, приведенным в главе 1, выполнение указанных равенств доказывает линейность оператора (7.6).

Формализуем следующий шаг — преобразование решетчатой функции (еще раз подчеркнем, что эта функция — последовательность  $\delta$ -функций с соответствующими весами) в последовательность импульсов (в данном примере — прямоугольных). Прямоугольный импульс  $x_{\text{пр}}$  с амплитудой, равной 1, и длительностью  $t_{\text{и}} = \gamma T$  может быть представлен в соответствии с рис. 7.7 как разность двух функций:  $1(t) - 1(t - t_{\text{и}})$ .

Изображение по Лапласу функции  $1(t)$  равно  $1/p$ , изображение функции  $1(t - t_{\text{и}})$  в соответствии с теоремой о запаздывании равно  $\frac{1}{p} e^{-pt_{\text{и}}}$ . Следовательно, изображение импульса:

$$S_{\text{ф}}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pt_{\text{и}}}. \quad (7.7)$$

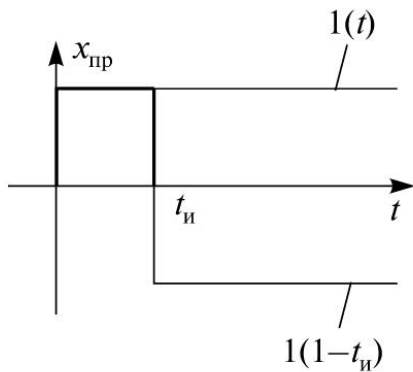


Рис. 7.7. Представление прямоугольного импульса в виде разности функций  $1(t)$  и  $1(t - t_{\text{и}})$

Элемент, имеющий передаточную функцию  $S_{\text{ф}}(p)$ , оригинал которой является функцией, описывающей форму импульса (в данном случае прямоугольную) называется *формирующим элементом* (ФЭ). Подключим вход ФЭ к выходу ИЭ (см. рис. 7.8, а).

На вход формирующего элемента поступает решетчатая функция — последовательность  $\delta$ -функций с весами  $x_{\text{вх}}[nT]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Реакция формирующего эле-

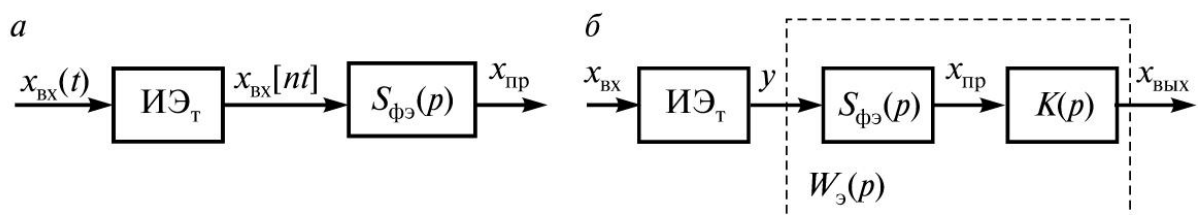


Рис. 7.8. Модель формирования последовательности импульсов, модулированных по амплитуде (а), модель разомкнутой импульсной системы (б)

мента  $S_{\phi}(p)$  на  $\delta$ -функцию — импульсная переходная функция этого звена (оригинал  $S_{\phi}(p)$ ) является импульсом соответствующей формы (в данном случае прямоугольной). Амплитуда импульса равна весу  $\delta$ -функций, т.е. при  $t = nT$  равна  $x_{\text{BX}}[nT]$ . Таким образом, сигнал  $x_{\text{пр}}$  на выходе формирующего элемента есть сигнал АИМ I. Если теперь выход  $S_{\phi}(p)$  соединить со входом линейной системы, заданной передаточной функцией  $W(p)$  (см. рис.7.4, б), то сигнал  $x_{\text{ВЫХ}}$  на ее выходе есть реакция линейной системы на последовательность импульсов (в данном примере прямоугольных), модулированных по амплитуде функцией  $x_{\text{BX}}(t)$ . В общем случае передаточная функция  $S_{\phi}(p)$  формирующего элемента есть изображение функции, описывающей заданную форму импульса. Так как в соответствии с рис. 7.8, б изображение

$$\begin{aligned} x_{\text{пр}}(p) &= y(p)S_{\phi}(p), \text{ а } x_{\text{ВЫХ}}(p) = x_{\text{пр}}(p)K(p), \\ \text{то } x_{\text{ВЫХ}}(p) &= y(p)S_{\phi}(p)W(p) = y(p)W_{\text{э}}(p), \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $W_{\text{э}}(p) = S_{\phi}(p)W(p)$  — передаточная функция эквивалентной непрерывной части системы.

Таким образом, выполненная формализация позволила получить модель разомкнутой линейной импульсной системы, состоящую из последовательного соединения идеального импульсного элемента и эквивалентной непрерывной части системы. Определим реакцию этой системы на входной сигнал  $x_{\text{BX}}(t)$ .

В момент времени  $t = 0$  на входе ИЭ сигнал  $x_{\text{BX}}(0)$ , на выходе ИЭ  $x_{\text{BX}}(0)\delta(t)$ . Реакция эквивалентной непрерывной части системы (рис. 7.9) на  $\delta$ -функцию с весом  $x_{\text{BX}}(0)$  — есть импульсная переходная характеристика, умноженная на  $x_{\text{BX}}(0)$ , т.е.  $x_{\text{BX}}(0)k(t)$ , где  $k(t) = L^{-1}[W(p)]$  — обратное преобразование Лапласа от передаточной функции  $W(p)$ .

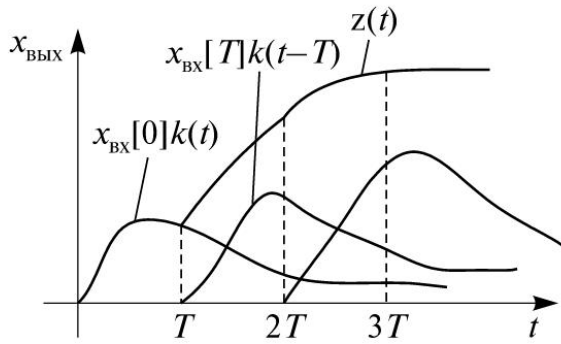


Рис. 7.9. Реакция разомкнутой импульсной системы на входной сигнал

В момент времени  $t = T$  на входе ИЭ сигнал  $x_{\text{ВХ}}(t)$ , на его выходе  $x_{\text{ВХ}}(T)\delta(t - T)$ , а реакция приведенной эквивалентной непрерывной части  $x_{\text{ВХ}}(T)k(t - T)$ .

Аналогично в момент времени  $t = mT$  на входе ИЭ сигнал  $x_{\text{ВХ}}[mT]$ , а на его выходе —  $x_{\text{ВХ}}[mT]\delta(t - mT)$ . Реакция приведенной эквивалентной непрерывной части:  $x_{\text{ВХ}}[mT](t - mT)$ . Заметим, что в этих выражениях  $t \leq mT$ ,  $k(t - mT) = 0$  при  $t < mT$ . Сигнал на выходе  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  равен сумме рассмотренных сигналов.

Прежде чем выписать общую формулу, введем обозначения. Время  $t$  будем определять в относительных единицах:  $\frac{t}{T} = n + \varepsilon$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , т.е.  $t = (n + \varepsilon)T$ . Функцию  $x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}[(n + \varepsilon)T]$  будем обозначать  $x_{\text{ВЫХ}}(n, \varepsilon)$ . Если  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  непрерывна, то  $x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon = 1] = x_{\text{ВЫХ}}[n + 1, \varepsilon = 0]$ .

Если при  $t = nT$  функция  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  имеет точку разрыва, то  $x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon = 1]$  — значение функции  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  слева от точки разрыва,  $x_{\text{ВЫХ}}[n + 1, \varepsilon = 0]$  — справа.

Импульсная переходная функция  $k(t - mT)$  при введенных обозначениях может быть записана в виде:

$$k(t - mT) = k[(n + \varepsilon)T - mT] = k[(n - m + \varepsilon)T] = k[n - m, \varepsilon].$$

Тогда формула для вычисления реакции разомкнутой импульсной системы на заданный входной сигнал  $x(t)$  имеет вид:

$$x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n x_{\text{ВХ}}[mT]k[n - m, \varepsilon]. \quad (7.9)$$

Эту сумму можно записать и в другом виде. Обозначим  $n - m = l$ . Тогда

$$x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = \sum_{l=0}^n x_{\text{ВХ}}[(n - l)T]k[l, \varepsilon]. \quad (7.10)$$

Выражения (7.9) и (7.10) называют *дискретной сверткой*, применяемой для определения реакции импульсной системы на входной сигнал при амплитудно-импульсной модуляции первого рода (АИМ I). Эти формулы подобны интегралу свертки для непрерывных систем.

**Пример 7.1**

Определить реакцию линейной системы, имеющей передаточную функцию

$$W(p) = \frac{1}{T_{\text{л}} p + 1}, \quad (7.11)$$

на последовательность прямоугольных однополярных импульсов длительностью  $t_{\text{и}} = \gamma T$ , где  $\gamma < 1$ , промодулированных функцией

$$x_{\text{вх}} = (t) = kt + a. \quad (7.12)$$

Вначале определим передаточную функцию  $W_{\text{э}}(p)$  эквивалентной непрерывной части. Передаточная функция формирующего элемента определяется выражением (7.7) при  $t_{\text{и}} = \gamma T$ . Тогда с учетом (7.11)

$$W_{\text{э}}(p) = \frac{1}{T_{\text{л}} p + 1} \cdot \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p} = \frac{1}{p(T_{\text{л}} p + 1)} - \frac{1}{p(T_{\text{л}} p + 1)} e^{-p\gamma T}. \quad (7.13)$$

Получим далее импульсную переходную функцию эквивалентной непрерывной части системы. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$p(T_{\text{л}} p + 1) = 0.$$

Его корни

$$p_1 = 0; p_2 = -\frac{1}{T_{\text{л}}}.$$

Оригинал первого слагаемого (7.13) имеет вид:

$$x_1(t) = 1(t) - e^{-\frac{t}{T_{\text{л}}}}.$$

Так как второе слагаемое (7.13) отличается от первого только множителем  $e^{-p\gamma T}$ , то в соответствии с теоремой о запаздывании

$$x_2(t) = \begin{cases} 1(t - \gamma T) - e^{-\frac{t - \gamma T}{T_{\text{л}}}} & \text{при } t \geq \gamma T; \\ 0 & \text{при } t < \gamma T. \end{cases}$$

Следовательно, импульсная переходная функция приведенной непрерывной части имеет вид:

$$k(t) = x_1(t) - x_2(t) = l(t) - l(t - \gamma T) - e^{-\frac{t}{T_{\text{л}}}} + e^{-\frac{t - \gamma T}{T_{\text{л}}}}.$$

Обратим внимание на то, что второе и четвертое слагаемые этого выражения равны нулю при  $t < \gamma T$ , т.е.

$$k(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_{\text{л}}}\right) & \text{при } t < \gamma T; \\ \exp\left(-\frac{t - \gamma T}{T_{\text{л}}}\right) - \exp\left(-\frac{t}{T_{\text{л}}}\right) & \text{при } t \geq \gamma T. \end{cases}$$

Переходя к относительному времени, получаем:

$$k[n, \varepsilon] = l[(n + \varepsilon)T] - l[(n + \varepsilon - \gamma)T] - e^{-\left(-(n + \varepsilon)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right)} + \exp\left(-(n + \varepsilon - \gamma)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right),$$

где второе и четвертое слагаемые равны нулю при отрицательном аргументе.

Запишем это несколько в иной форме, понимая, что  $t = (n - 1 + 1 + \varepsilon)T$ :

$$k[n, \varepsilon] = \begin{cases} l[n, \varepsilon] - \exp\left(-(n + \varepsilon)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right) - l[n - 1, 1 + \varepsilon - \gamma] + \\ + \exp\left(-(n - 1)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right) \cdot \exp\left(-(1 + \varepsilon - \gamma)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right) & \text{при } \varepsilon < \gamma; \\ -\exp\left(-(n + \varepsilon)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right) + \exp\left(-(n + \varepsilon - \gamma)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right) & \text{при } \gamma \leq \varepsilon \leq 1, \end{cases} \quad (7.14)$$

где  $-l[n - 1, 1 + \varepsilon - \gamma] + \exp\left(-(n - 1)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right) \cdot \exp\left(-(1 + \varepsilon - \gamma)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right)$  отлично от 0 при  $n \geq 1$

и  $0 \leq \varepsilon < \gamma$ ;  $\exp\left(-(n + \varepsilon - \gamma)\frac{T}{T_{\text{л}}}\right)$  отлично от 0 при  $n \geq 1, \gamma \leq \varepsilon < 1$ .

Подставив (7.14) в (7.9), получаем:

$$x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = \begin{cases} \sum_{m=0}^n x_{\text{ВХ}}[mT] \left\{ \begin{aligned} & l[n-m, \varepsilon] - \exp\left(-\frac{(n-m+\varepsilon)T}{T_{\text{Л}}}\right) - \\ & - l[n-1-m, 1+\varepsilon-\gamma] + \\ & + \exp\left(-\frac{(n-m-1)T}{T_{\text{Л}}}\right) \exp\left(-\frac{(1+\varepsilon-\gamma)T}{T_{\text{Л}}}\right) \end{aligned} \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma; \\ \sum_{m=0}^n x_{\text{ВХ}}[mT] \left\{ \begin{aligned} & -\exp\left(-\frac{(n-m+\varepsilon)T}{T_{\text{Л}}}\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{(n-m+\varepsilon-\gamma)T}{T_{\text{Л}}}\right) \end{aligned} \right\} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.15)$$

В соответствии с условием задачи

$$x_{\text{ВХ}}[mT] = kmT + a. \quad (7.16)$$

### Пример 7.2

Определить реакцию линейной системы, имеющей передаточную функцию (7.11), на «ступенчатый» входной сигнал, заданный в соответствии с рис. 7.10 функцией  $x_{\text{ВХ}}(t) = x[nT] = a + knT$ .

Поставленная задача сводится к предыдущей при  $\gamma = 1$ .

Тогда, положив в (7.15)  $\gamma = 1$ , с учетом (7.16) получаем (7.17):

$$x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n (a + kmT) \left\{ l[n-m, \varepsilon] - \exp\left(-\frac{(n-m+\varepsilon)T}{T_{\text{Л}}}\right) - l[n-1-m, \varepsilon] + \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{(n-m-1)T}{T_{\text{Л}}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon T}{T_{\text{Л}}}\right) \right\}. \quad (7.17)$$

Обобщим эти примеры, рассматривая реакцию линейной стационарной системы, заданной своей передаточной функцией  $W(p)$ , на последовательность прямоугольных импульсов длительностью  $t_{\text{и}} = \gamma T$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  при АИМ I и входном сигнале  $x_{\text{ВХ}}(t)$ . Передаточная функция непрерывной части системы

$$W_{\text{э}}(p) = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\gamma T} \right) W(p).$$

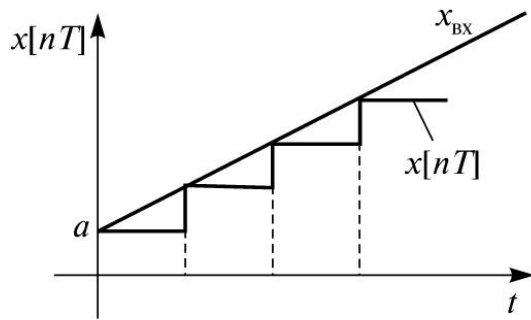


Рис. 7.10. Преобразование непрерывного сигнала  $x_{\text{BX}}(t)$  в ступенчатый  $x[nT]$

Тогда импульсная переходная функция приведенной непрерывной части системы есть оригинал  $W_{\vartheta}(p)$ :

$$k(t) = L^{-1}[W_{\vartheta}(p)] = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p} - \frac{W(p)}{p}e^{-p\gamma T}\right]. \quad (7.18)$$

Так как  $W(p)/p$  — изображение переходной функции  $h_{\Lambda}(t)$  заданной непрерывной части системы (не эквивалентной), то

$$k(t) = h_{\Lambda}(t) - h_{\Lambda}(t - \gamma T) = \begin{cases} h_{\Lambda}(t) & \text{при } 0 \leq t < \gamma T; \\ h_{\Lambda}(t) - h_{\Lambda}(t - \gamma T) & \text{при } t \geq \gamma T. \end{cases}$$

Переходя к относительному времени и учитывая, что импульсная переходная функция  $k(t)$  определяется различными выражениями при  $t < \gamma T$  и при  $t \geq \gamma T$ , запишем:

$$k[n, \varepsilon] = \begin{cases} h_{\Lambda}[n, \varepsilon] - h_{\Lambda}[n-1, 1 + \varepsilon - \gamma] & \text{при } \varepsilon < \gamma; \\ h_{\Lambda}[n, \varepsilon] - h_{\Lambda}[n, \varepsilon - \gamma] & \text{при } \varepsilon \geq \gamma. \end{cases} \quad (7.19)$$

При записи учтено, что  $t - \gamma T = (v + \varepsilon)T - \gamma T = (v + \varepsilon - \gamma)T$  и, следовательно, при  $\varepsilon < \gamma$  удобно записать  $t = [n - 1 + (1 + \varepsilon - \gamma)]T$ . Подставив (7.19) в (7.9), получаем выражение сигнала на выходе разомкнутой импульсной системы при АИМ I рода и прямоугольных импульсах:

$$x_{\text{ВЫХ I}}[n, \varepsilon] = \begin{cases} \sum_{m=0}^n x_{\text{ВХ}}[m] \left\{ h_{\Lambda}[n-m, \varepsilon] - h_{\Lambda}[n-m-1, 1 + \varepsilon - \gamma] \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma; \\ \sum_{m=0}^n x_{\text{ВХ}}[m] \left\{ h_{\Lambda}[n-m, \varepsilon] - h_{\Lambda}[n-m, \varepsilon - \gamma] \right\} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.20)$$

Здесь индекс I использован для указания того, что рассматривается система с амплитудно-импульсной модуляцией первого рода.

**Система с амплитудно-импульсной модуляцией II рода.** Амплитудно-импульсным модулятором, реализующим АИМ II, является ключ К (рис. 7.11), на вход которого подан входной сигнал  $x_{\text{ВХ}}(t)$ , выход К подключен ко входу линейной системы  $W(p)$ . Ключ замыкается периодически на время  $\gamma T$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $T$  — период. Следовательно, на вход линейной системы в промежутке времени  $nT \leq t \leq (n + 1)T$  поступает входной сигнал

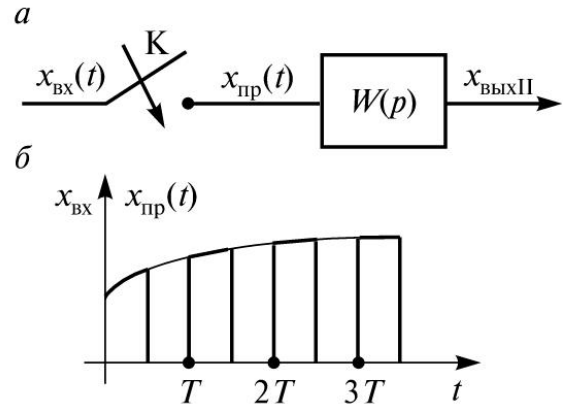


Рис. 7.11. Модель разомкнутой импульсной системы с АИМ II рода (а), сигнал на входе линейной части системы (б)

$$x_{\text{пр}}(t) = \begin{cases} x_{\text{ВХ}}(t) & \text{при } nT \leq t < (n + \gamma)T; \\ 0 & \text{при } (n + \gamma) \leq t < (n + 1)T. \end{cases}$$

Используя интеграл свертки, получим реакцию линейной части системы на импульсный сигнал, поступающий на ее вход в момент  $t = mT$ :

$$x_{\text{ВЫХII}}^{(m)}(t) = \begin{cases} \int_{mT}^t x_{\text{ВХ}}(\tau) k(t - mT - \tau) d\tau & \text{при } mT \leq t < (m + \gamma)T; \\ \int_{mT}^{(m + \gamma)T} x_{\text{ВХ}}(\tau) k(t - mT - \tau) d\tau & \text{при } t \geq (m + \gamma)T, \end{cases} \quad (7.21)$$

где  $k(t) = L^{-1}[W(p)]$  — импульсная переходная характеристика линейной части системы; верхний индекс  $(m)$  в обозначении сигнала подчеркивает, что выражение (7.21) определяет реакцию линейной системы только на  $m$ -й импульс;  $t \geq mT$ .

Тогда реакция системы на последовательность прямоугольных импульсов, вершины которых повторяют входной сигнал, т.е. при АИМ II, определится как сумма сигналов  $x_{\text{ВЫХII}}^{(m)}(t)$ :

$$\begin{aligned} x_{\text{ВЫХII}}[(n + \varepsilon)T] &= x_{\text{ВЫХII}}[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n x_{\text{ВЫХII}}^{(m)}[t = (n + \varepsilon)T] = \\ &= \begin{cases} \sum_{m=0}^n \int_{mT}^t x_{\text{ВХ}}(\tau) k[(n - m)T + \varepsilon T - \tau] d\tau & \text{при } mT \leq t < (m + \gamma)T; \\ \sum_{m=0}^n \int_{mT}^{(m + \gamma)T} x_{\text{ВХ}}(\tau) k[(n - m)T + \varepsilon T - \tau] d\tau & \text{при } t \geq (m + \gamma)T. \end{cases} \quad (7.22) \end{aligned}$$



### 7.3. Модели разомкнутых линейных импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией при задании непрерывной части системы матричными уравнениями

В современной теории управления моделями линейных стационарных систем, как было показано в п. 3.6, являются матричные дифференциальные уравнения:

$$\dot{X} = AX + BU; \quad (7.23)$$

$$Y = CX + DU. \quad (7.24)$$

Тогда при АИМ I функциональная схема импульсной системы аналогично схеме, описанной в предыдущем параграфе, имеет вид, приведенный на рис. 7.12.

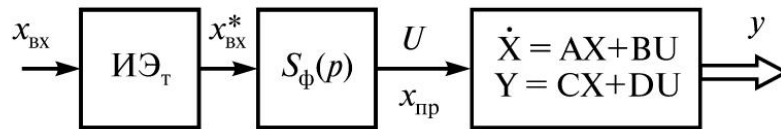


Рис. 7.12. Модель разомкнутой импульсной системы

Выпишем выражение, определяющее зависимости фазовых координат  $x(t)$  от времени при заданном входном сигнале  $u$  и векторе значений фазовых координат  $x(t_0)$ :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} \left[ X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(\tau-t_0)} BU(\tau) d\tau \right]. \quad (7.25)$$

В соответствии с понятием формирующего элемента, введенного в предыдущем параграфе, оригинал  $S_{\phi}(p)$  — есть функция, описывающая форму импульса  $f(t)$ , где  $0 \leq \tau \leq T$ . Тогда

$$u[nT + \tau] = x_{BX}[nT]f(\tau). \quad (7.26)$$

Будем считать, что состояние системы в момент времени  $t_0 = nT$  известно, тогда после подстановки (7.26) в (7.25) и перехода к относительному времени имеем:

$$\begin{aligned}
X[(n+\varepsilon)T] &= e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} Bx_{\text{BX}}[nT] f(\tau) d\tau \right\} = \\
&= e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} f(\tau) d\tau Bx_{\text{BX}}[nT] \right\}. \quad (7.27)
\end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$\int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} f(\tau) d\tau = W_{\Phi}(A, \varepsilon), \quad (7.26)$$

где  $W_{\Phi}(A, \varepsilon)$  — матрица, которую назовем матрицей преобразования\*.

Тогда

$$X[(n+\varepsilon)T] = e^{AT\varepsilon} \{ X[nT] + W_{\Phi}(A, \varepsilon) Bx_{\text{BX}}[nT] \}. \quad (7.29)$$

Положив в (7.27)  $\varepsilon = 1$ , получим:

$$X[(n+1)T] = e^{AT} \{ X[nT] + W_{\Phi}(A, 1) Bx_{\text{BX}}[nT] \}. \quad (7.30)$$

Выражения (7.27) и (7.30) позволяют определить реакцию линейной импульсной системы с АИМ I на заданный входной сигнал при известных начальных значениях фазовых координат  $X(0)$ . Уравнение (7.30) является рекуррентным соотношением, позволяющим при известных  $X[0]$  и  $x_{\text{BX}}[0]$  определить  $X[T]$ ; далее при вычисленных  $X[T]$  и заданном  $x_{\text{BX}}[T]$  рассчитать  $X[2T]$  и т.д. При известных  $X[nT]$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$  в соответствии с уравнением (7.27) рассчитывают значения  $X[n, \varepsilon]$  при любом  $\varepsilon$ . Выход системы  $Y$  в соответствии с (7.24) рассчитывается как линейная комбинация фазовых координат.

Таким образом, модель разомкнутой импульсной системы с АИМ I в виде уравнений (7.27) и (7.30) позволяет определить ее реакцию на заданный входной сигнал.

В качестве частного случая рассмотрим традиционную АИМ I, когда моделируемыми по амплитуде являются прямоугольные импульсы длительностью  $t_{\text{и}} = \gamma T$ ,  $0 < \gamma < 1$ . Для прямоугольных импульсов

$$f(\tau) = 1(\tau) - 1(\tau - \gamma T). \quad (7.31)$$

---

\* Матрица преобразования введена А.И. Сеславиным.

Подставив (7.31) в (7.26), получаем;

$$W_{\Phi}(A, \varepsilon) = \begin{cases} \int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} d\tau = I - A^{-1}e^{-A\varepsilon T} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma; \\ \int_0^{\gamma T} e^{-A\tau} d\tau = I - A^{-1}e^{-A\gamma T} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1, \end{cases} \quad (7.32)$$

где  $I$  — единичная матрица.

Следовательно,

$$\begin{aligned} X[(n + \varepsilon)T] = \\ = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \{X[nT] + (I - A^{-1}e^{-A\varepsilon T})Bx_{\text{BX}}[nT]\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma; \\ e^{AT\varepsilon} \{X[nT] + (I - A^{-1}e^{-A\gamma T})Bx_{\text{BX}}[nT]\} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Откуда

$$X[(n + 1)T] = e^{AT} \{X[nT] + (I - A^{-1}e^{-A\gamma T})Bx_{\text{BX}}[nT]\}. \quad (7.34)$$

Уравнения (7.33) и (7.34) являются моделью разомкнутой импульсной системы с АИМ I и прямоугольными импульсами. Используя рекуррентную процедуру, описанную ранее, формулы (7.33), (7.34) и (7.24) позволяют рассчитывать реакцию этой линейной импульсной системы на заданный входной сигнал.

Функциональная схема модели разомкнутой импульсной системы с АИМ II, линейная часть которой задана уравнениями (7.23) и (7.24) по аналогии с моделью, описанной выше, имеет вид, приведенный на рис. 7.13.

В отличие от системы с АИМ I, в данном случае

$$u(t) = \begin{cases} x_{\text{BX}}[nT + \tau] & \text{при } n = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq \tau \leq \gamma T; \\ 0 & \text{при } \gamma T < \tau < T, \end{cases} \quad (7.35)$$

где  $\gamma T = t_{\text{и}}$ ,  $\gamma$  — относительная длительность импульса.

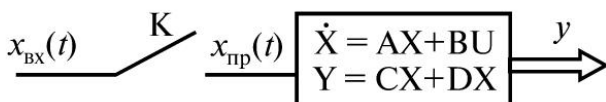


Рис. 7.13. Модель разомкнутой импульсной системы с АИМ II рода

Будем считать, что состояние системы в момент времени  $t_0 = nT$  известно, тогда после подстановки (7.35) в (7.25) и переходя к относительному времени, имеем:

$$X[(n+\varepsilon)T] = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} Bx_{\text{вх}}[nT+\tau] d\tau \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\gamma T} e^{-A\tau} Bx_{\text{вх}}[nT] d\tau \right\} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.36)$$

При  $\varepsilon = 1$

$$X[(n+1)T] = e^{AT} \left\{ X[nT] + \int_0^{\gamma T} e^{-A\tau} Bx_{\text{вх}}[nT+\tau] d\tau \right\}. \quad (7.37)$$

Уравнения (7.36) и (7.37) являются рекуррентными соотношениями, позволяющими при заданных начальных условиях и входном сигнале  $x_{\text{вх}}(t)$  определять изменение фазовых координат разомкнутой линейной импульсной системы с АИМ II во времени. Вектор  $Y$  (выход системы) вычисляется как линейная комбинация фазовых координат в соответствии с выражением (7.24).

#### 7.4. Модель разомкнутой импульсной системы с широтно-импульсной модуляцией

Функциональная схема модели разомкнутой импульсной системы с широтно-импульсной модуляцией представлена на рис. 7.14. ШИМ — широтно-импульсный модулятор преобразует входной сигнал  $x_{\text{вх}}(t)$  в последовательность прямоугольных импульсов, длительность которых зависит от этого входного сигнала (модулирующей функции). Линейная часть системы задана системой уравнений (7.23), (7.24).

ШИМ реализует различные методы модуляции. Последовательность однополярных прямоугольных импульсов (рис. 7.15, а), период следования которых по-

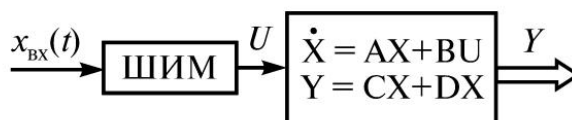


Рис. 7.14. Модель разомкнутой импульсной системы с ШИМ

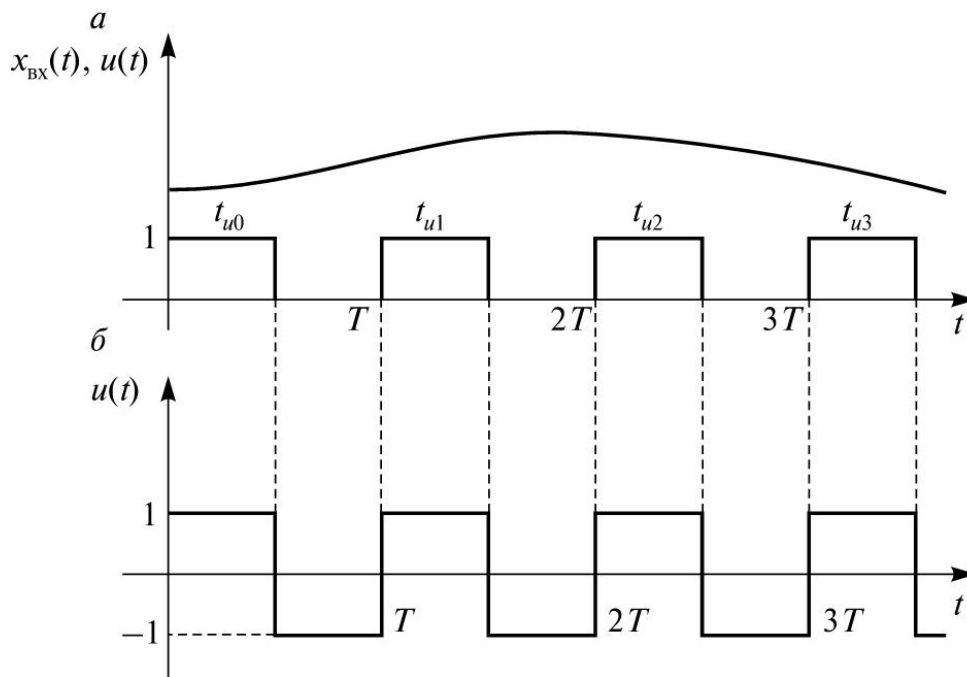


Рис. 7.15. График модулирующей функции  $x_{BX}(t)$ , сигнал однополярной односторонней (а) и двухполярной односторонней модуляции (б)

стоянен и равен  $T$ , длительность переменна и зависит от значений моделирующей функции, начало совпадает с моментами времени  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , называют *сигналом с однополярной односторонней широтно-импульсной модуляцией*. На выходе ШИМ можно получить *двухполярный сигнал* (см. рис. 7.15, б). В этом случае реализуется *двухполярная односторонняя модуляция*. Длительность  $n$ -го импульса на выходе идеального широтно-импульсного модулятора пропорциональна значению входного сигнала в момент времени  $t = nT$ :

$$t_{\text{ип}} = kx_{BX}[nT], \quad (7.38)$$

где  $t_{\text{ип}}$  — длительность  $n$ -го импульса;  
 $k$  — коэффициент пропорциональности.

Относительная длительность  $n$ -го импульса определяется выражением

$$\gamma[n] = \frac{t_{\text{ип}}}{T} = \frac{k}{T} x_{BX}[nT]. \quad (7.39)$$

На выходе модулятора, реализующего интегральную широтно-импульсную модуляцию, описанную в п. 7.1, длительность  $n$ -го импульса в соответствии с (7.4) определяется средним значением

модулирующей функции  $x_{\text{BX}}(t)$  за образцовый промежуток времени  $t_{\text{об}} < T$ , предшествующий переднему фронту этого импульса:

$$t_{\text{ип}} = k \frac{1}{t_{\text{об}}} \int_{nT-t_{\text{об}}}^{nT} x(t) dt. \quad (7.40)$$

Откуда относительная длительность  $n$ -го импульса

$$\gamma[n] = \frac{t_{\text{ип}}}{T} = \frac{k}{T t_{\text{об}}} \int_{nT-t_{\text{об}}}^{nT} x(t) dt. \quad (7.41)$$

При  $t_{\text{об}} \rightarrow 0$  модель модулятора с интегральной широтно-импульсной модуляцией преобразуется в модель идеального ШИМ. Действительно, при  $t_{\text{об}} \rightarrow 0$  среднее значение  $x_{\text{BX}}(t)$  за  $t_{\text{об}}$  стремится в случае непрерывного  $x_{\text{BX}}(t)$  к своему мгновенному значению  $x_{\text{BX}}[nT]$ .

Модель (7.39) идеального модулятора широко используется. Это объясняется тем, что шаг временной дискретизации  $T$  выбирается с учетом возможности достаточно точного описания дискретным сигналом непрерывного. Откуда следует, что за время  $T$  сигнал  $x_{\text{BX}}(t)$  изменяется незначительно и следовательно, принимаемые в модели идеального модулятора допущения о линейной зависимости длительности импульса от значения моделирующей функции в начале импульса оправдано.

На выходе модулятора с линейной разверткой, принцип действия которого изложен в п. 7.1, длительность  $n$ -го импульса пропорциональна значению модулирующей функции  $x_{\text{BX}}(t)$  в момент окончания этого импульса. В соответствии с (7.1)

$$t_{\text{ип}} = \frac{T}{A} x_{\text{BX}}[nT + t_{\text{ип}}]. \quad (7.42)$$

Откуда относительная длительность  $n$ -го импульса вычисляется из уравнения

$$\gamma[n] = \frac{1}{A} x_{\text{BX}} \{nT + \gamma[n]T\}. \quad (7.43)$$

В ряде случаев решение уравнения относительно  $\gamma[n]$  сопряжено со значительными трудностями. Вместе с тем можно достаточно ра-

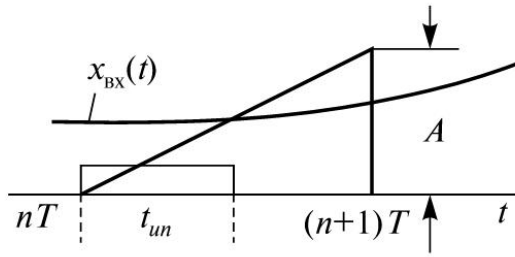


Рис. 7.16. Формирование прямоугольного импульса в широтно-импульсном модуляторе с линейной разверткой

Очевидно, что рассматриваемый метод модуляции реализуем, когда  $x_{\max}(t) < A$  и максимальное значение скорости изменения входного сигнала

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right]_{\max} < \frac{A}{T}. \quad \text{Кроме того,}$$

изменение функции  $x_{\text{BX}}(t)$  на шаге временной дискретизации  $T$  должно быть невелико для того, чтобы импульсный сигнал имел достаточно информации о модулирующей функции. В соответствии с этим функцию  $x_{\text{BX}}(t)$  разложим в ряд Тейлора при  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и ограничимся первыми двумя членами ряда, т.е.

$$x_{\text{BX}}[nT + \varepsilon T] = x_{\text{BX}}[nT] + \frac{\varepsilon T}{1!} \left. \frac{dx_{\text{BX}}(t)}{dt} \right|_{t=nT}.$$

При такой кусочно-линейной модели входного сигнала уравнение имеет вид:

$$\gamma[n] = \frac{1}{A} \left\{ x_{\text{BX}}[nT] + \frac{\gamma[n]T}{1!} \left. \frac{dx_{\text{BX}}(t)}{dt} \right|_{t=nT} \right\},$$

откуда

$$\gamma[n] = \frac{x_{\text{BX}}[nT]}{A - T \left. \frac{dx_{\text{BX}}(t)}{dt} \right|_{t=nT}}. \quad (7.44)$$

Рассмотрим определение функции  $\gamma[n]$  на примере.

зумно с практической точки зрения выбрать модель входного сигнала и соответствующий шаг временной дискретизации  $T$  так, чтобы получить зависимость  $\gamma[n]$ .

Рассмотрим еще раз (см. п. 7.1) метод линейной развертки при реализации ШИМ. Формирование  $n$ -го импульса осуществляется в соответствии с временной диаграммой, приведенной на рис. 7.16.

**Пример 7.3**

Определить функцию  $\gamma[n]$  при входном сигнале

$$x_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 20t^2 + 5 & \text{при } 0 \leq t \leq 10 \text{ с;} \\ 2005 & \text{при } t > 10 \text{ с.} \end{cases} \quad (7.45)$$

График функции  $x_{\text{вх}}(t)$  приведен на рис. 7.17. Этот входной сигнал подан на вход широтно-импульсного модулятора с линейной разверткой. Параметры модулятора заданы  $A = 3000$ ,  $T = 10^{-3}$  с.

Требуется определить  $\gamma[n]$ .

Вначале ответим на вопрос: возможно ли использование заданного модулятора для преобразования сигнала (7.45)?

Сравним максимальное значение входного сигнала с величиной  $A$ :

$x_{\text{вх}}(t)_{\text{max}} = 2005 < 3000$ . По этому параметру ответ положительный. Далее определим максимальное значение скорости изменения входного сигнала:

$$\frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt} = \begin{cases} 40t & \text{при } 0 \leq t \leq 10 \text{ с;} \\ 0 & \text{при } t \geq 10, \text{ с,} \end{cases}$$

откуда  $\left[ \frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt} \right]_{\text{max}} = 400 < \frac{3000}{10^{-3}} = \frac{A}{T}, \frac{1}{\text{с}}.$

Следовательно, заданный модулятор может быть использован для преобразования входного сигнала (7.45).

Следующий вопрос, на который необходимо ответить, возможно ли использовать модель (7.44) для описания заданного преобразования. Очевидно, что правомочность модели следует проверять на участке изменения функции  $x_{\text{вх}}(t)$ . Разложим заданную функцию  $x_{\text{вх}}(t)$  при  $t = nT < 10$  в ряд Тейлора:

$$x_{\text{вх}}[nT + \epsilon T] = 20n^2T^2 + 5 + \frac{40nT}{1!} \epsilon T + \frac{40}{2!} (\epsilon T)^2.$$

Наибольшая величина третьего члена ряда при  $\epsilon = 1$  составляет  $\frac{40T^2}{2} = 2 \cdot 10^{-5}$  что на 5 порядков меньше суммы первых двух членов ряда даже при  $n = 0$ . Следовательно, использование модели (7.44) правомочно, и

$$\gamma[n] = \begin{cases} \frac{20n^2T^2 + 5}{A - T \cdot 40T} = \frac{20 \cdot 10^{-6} n^2}{3000 - 40 \cdot 10^{-6}} & \text{при } n < \frac{10}{10^{-3}} = 10^4; \\ \frac{2005}{A} = \frac{2005}{3000} & \text{при } n = \frac{10}{10^{-3}} > 10^4. \end{cases}$$

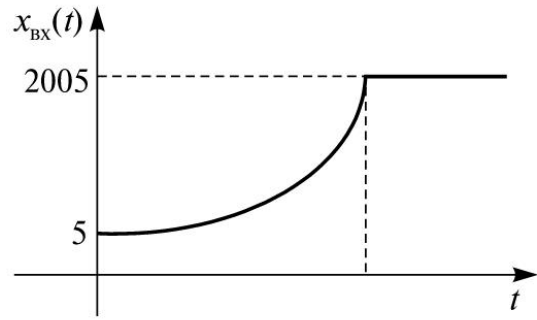


Рис. 7.17. График сигнала на входе ШИМ



Двусторонняя двухполярная ШИМ реализуется модулятором в соответствии с временной диаграммой, представленной на рис. 7.18, где  $x_{\text{BX}}(t)$  — модулирующая функция. Треугольный сигнал формируется генератором модулятора. Переключение полярности сигнала на выходе модулятора осуществляется в те моменты времени, когда  $x_{\text{BX}}(t)$  пересекается с треугольным сигналом. Высота и основание треугольника равны  $A$  и  $T$ , соответственно. Очевидно, что для правильного функционирования модулятора необходимо выполнение следующих условий:  $x_{\text{BX}}(t)_{\text{max}} \leq A$ , модуль максимальной скорости

изменения входного сигнала  $\left| \left[ \frac{dx_{\text{BX}}}{dt} \right]_{\text{max}} \right| < \frac{A}{T}$ .

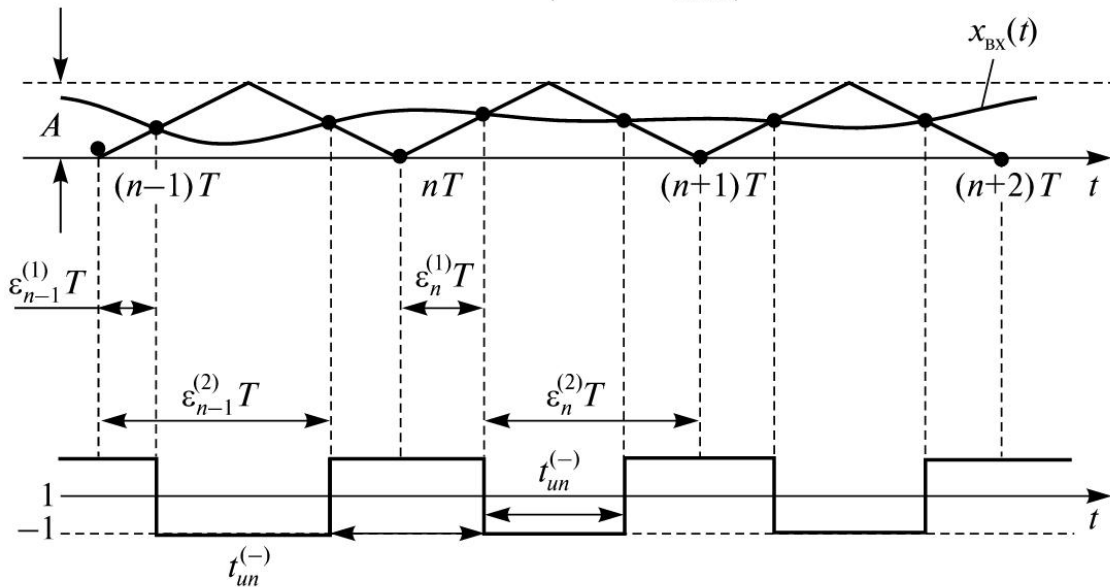


Рис. 7.18. Временная диаграмма преобразования непрерывного сигнала  $x_{\text{BX}}(t)$  в сигнал двухсторонней двухполярной ШИМ

В соответствии с временной диаграммой длительность положительного импульса, передний фронт которого сформирован в момент времени  $t = (n-1)T + \epsilon_{n-1}^{(2)}T$ , а задний — в момент времени  $t = nT + \epsilon_n^{(2)}T$ , равна

$$t_{\text{ип}}^{(+)} = \frac{T}{A} \frac{x_{\text{BX}}[(n-1)T + \epsilon_{n-1}^{(2)}T] + x_{\text{BX}}[nT + \epsilon_n^{(1)}T]}{2}.$$

Длительность отрицательного импульса, следующего за рассмотренным, равна

$$t_{\text{ИП}}^{(-)} = \frac{T}{A} \frac{x_{\text{ВХ}}[nT + \varepsilon_n^{(1)}T] + x_{\text{ВХ}}[nT + \varepsilon_n^{(2)}T]}{2}.$$

Откуда следует, что длительность импульсов при двухсторонней двухполярной широтно-импульсной модуляции пропорциональна половине суммы значений модулирующей функции в начале и конце импульса. Для определения связи величин  $\varepsilon_n^{(1)}T$  и  $\varepsilon_n^{(2)}T$  с  $x_{\text{ВХ}}(t)$  (см. рис. 7.18) воспользуемся разложением этой функции в ряд Тейлора в точках  $t = nT$  и  $t = nT + \frac{T}{2}$  с удержанием первых двух членов ряда:

$$x_{\text{ВХ}}[nT + \varepsilon T] = \begin{cases} x[nT] + \frac{\varepsilon T}{1!} \frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt} \Big|_{t=nT} & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}; \\ x\left[nT + \frac{T}{2}\right] + \frac{\varepsilon T}{1!} \frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt} \Big|_{t=nT + \frac{1}{2}T} & \text{при } \frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

Тогда значение  $\varepsilon_n^{(1)}T$  определяется из уравнения

$$\varepsilon_n^{(1)}T = x[nT] + \frac{\varepsilon_n^{(1)}T}{1!} \frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt} \Big|_{t=nT},$$

откуда

$$\varepsilon_n^{(1)} = \frac{x_{\text{ВХ}}[nT]}{A - T \frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt} \Big|_{t=nT}}. \quad (7.46)$$

Значение  $\varepsilon_n^{(2)}T$  определяется из уравнения

$$2A - 2A\varepsilon_n^{(2)} = x\left[nT + \frac{1}{2}T\right] + \frac{\varepsilon_n^{(2)}T}{1!} \frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt} \Big|_{t=nT + \frac{1}{2}T}.$$

Откуда

$$\varepsilon_n^{(2)} = \frac{2A - x_{\text{BX}} \left[ nT + \frac{T}{2} \right]}{2A + T \left. \frac{dx_{\text{BX}}(t)}{dt} \right|_{t=nT+\frac{1}{2}T}}. \quad (7.47)$$

Перейдем далее к формализации записи сигнала  $u(t)$  на входе линейной части системы. При односторонней однополярной широтно-импульсной модуляции

$$u[(n + \varepsilon)T] = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma[n]; \\ 0 & \text{при } \gamma[n] \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.48)$$

При односторонней двухполярной модуляции

$$u[(n + \varepsilon)T] = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma[n]; \\ -1 & \text{при } \gamma[n] \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.49)$$

При двухсторонней двухполярной широтно-импульсной модуляции в соответствии с временной диаграммой (см. рис. 7.18)

$$u[(n + \varepsilon)T] = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_n^{(1)}; \\ -1 & \text{при } \varepsilon_n^{(1)} \leq \varepsilon < \varepsilon_n^{(2)}; \\ 1 & \text{при } \varepsilon_n^{(2)} \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.50)$$

В этих выражениях  $\gamma[n]$  определяется в зависимости от используемого вида широтно-импульсной модуляции формулами (7.39) для идеального ШИМ, (7.41) для ИШИМ, (7.44) для ШИМ с линейной разверткой. Величины  $\varepsilon_n^{(1)}T$  и  $\varepsilon_n^{(2)}T$  определяются по формулам (7.46), (7.47) при двухсторонней двухполярной модуляции.

Определим вначале реакцию разомкнутой системы с односторонней однополярной широтно-импульсной модуляцией на входной сигнал  $x_{\text{BX}}(t)$ . Будем считать, что состояние системы в момент времени  $t_0 = nT$  известно. Тогда после подстановки (7.49) в (7.25) и перехода к относительному времени имеем:

$$X[(n+\varepsilon)T] = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} d\tau B \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma[n]; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\gamma[n]T} e^{-A\tau} d\tau B \right\} & \text{при } \gamma[n] \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.51)$$

После интегрирования получаем:

$$X[(n+\varepsilon)T] = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + A^{-1} (I - e^{-AT\varepsilon}) B \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma[n]; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + A^{-1} (I - e^{-AT\gamma[n]}) B \right\} & \text{при } \gamma[n] \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (7.52)$$

Тогда рекуррентное соотношение для вычисления  $x[nT]$  приобретает вид:

$$X[(n+1)T] = e^{AT} \left\{ X[nT] + A^{-1} (I - e^{-AT\gamma[n]}) B \right\}. \quad (7.53)$$

Отсюда изменение фазовых координат при заданном входном сигнале в дискретные моменты времени  $t = nT$  определяется по рекуррентному соотношению (7.53). После чего значения фазовых координат при изменении  $\varepsilon$  от 0 до 1 вычисляется по формуле (7.52). Выход системы  $Y$  в соответствии с (7.24) рассчитывается как линейная комбинация фазовых координат и управления.

Если произведение определителя матрицы  $A$  и шага временной дискретизации  $T$  таковы, что  $|A|T \ll 1$ , то модель можно линеаризовать. При этих условиях разложим функцию  $I - e^{-AT\gamma[n]}$  в ряд Тейлора и ограничимся линейным членом разложения:

$$I - e^{-AT\gamma[n]} \approx A\gamma[n]T.$$

Погрешность от отбрасывания остальных членов ряда может быть оценена сверху. Она не превышает

$$e^{|AT|} \frac{|AT|^2}{2!}.$$

При этом (7.53) имеет вид:

$$X[(n+1)T] = e^{AT} \{X[nT] + A^{-1}A\gamma[n]B\} = e^{AT} \{X[nT] + \gamma[n]B\}. \quad (7.54)$$

Таким образом, при  $|AT| \ll 1$  получаем линейное рекуррентное соотношение.

Определим далее реакцию разомкнутой импульсной системы с односторонней двухполярной широтно-импульсной модуляцией на входной сигнал  $x_{\text{BX}}(t)$ . Будем считать, что состояние системы в момент времени  $t_0 = nT$  известно. Тогда после подстановки (7.49) в (7.25) и перехода к относительному времени имеем:

$$X[(n+\varepsilon)T] = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} d\tau B \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma[n]; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\gamma[n]} e^{-A\tau} d\tau B - \int_{\gamma[n]}^{\varepsilon} e^{-A\tau} d\tau B \right\} & \text{при } \gamma[n] \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

После интегрирования получаем:

$$X[(n+\varepsilon)T] = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + A^{-1}[I - e^{-AT\varepsilon}]B \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma[n]; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + A^{-1}[I - e^{-AT\gamma[n]}]B - \right. & (7.55) \\ \left. - A^{-1}[e^{-AT\gamma[n]} - e^{-AT\varepsilon}]B \right\} & \text{при } \gamma[n] \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

Полагая в (7.55)  $\varepsilon = 1$ , получаем рекуррентное соотношение для вычисления  $X[nT]$ :

$$X[(n+1)T] = e^{AT} \left\{ X[nT] + A^{-1}[I - e^{-AT\gamma[n]}]B \right\} - A^{-1} \left[ e^{-AT\gamma[n]} - e^{-AT} \right] B. \quad (7.56)$$

Если  $|AT| \ll 1$ , то соотношение (7.56) можно линеаризовать так же, как это было выполнено при однополярной модуляции. В результате

$$X[(n+1)T] \approx e^{AT} \{X[nT] + [2\gamma[n] - 1]B\}. \quad (7.57)$$

Выражения (7.56) или (7.57), (7.55) и (7.24) составляют систему соотношений, позволяющих в соответствии с рекуррентной процедурой, описанной при однополярной модуляции, рассчитывать реакцию импульсной системы на заданный входной сигнал.

Реакцию линейной импульсной системы с двухполярной двухсторонней широтно-импульсной модуляцией на входной сигнал  $x_{\text{вх}}(t)$  получим аналогично. Будем считать, что состояние системы в момент времени  $t_0 = nT$  известно. Тогда после подстановки (7.50) в (7.25) и перехода к относительному времени имеем:

$$X[(n+\varepsilon)T] = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon T} e^{-A\tau} d\tau B \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_n^{(1)}; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon_n^{(1)}T} e^{-A\tau} d\tau B - \right. \\ \left. - \int_{\varepsilon_n^{(1)}T}^{\varepsilon T} e^{-A\tau} d\tau B \right\} & \text{при } \varepsilon_n^{(1)} \leq \varepsilon < \varepsilon_n^{(2)}; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon_n^{(1)}T} e^{-A\tau} d\tau B - \right. \\ \left. - \int_{\varepsilon_n^{(1)}T}^{\varepsilon_n^{(2)}T} e^{-A\tau} d\tau B + \int_{\varepsilon_n^{(2)}T}^{\varepsilon T} e^{-A\tau} d\tau B \right\} & \text{при } \varepsilon_n^{(2)} \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases} \quad (7.58)$$

Откуда

$$X[(n+1)T] = e^{AT} \left\{ X[nT] + \int_0^{\varepsilon_n^{(1)}T} e^{-A\tau} d\tau B - \int_{\varepsilon_n^{(1)}T}^{\varepsilon_n^{(2)}T} e^{-A\tau} d\tau B + \int_{\varepsilon_n^{(2)}T}^T e^{-A\tau} d\tau B \right\}. \quad (7.59)$$

После интегрирования получаем:

$$X[(n+\varepsilon)T] = \begin{cases} e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + A^{-1} \left( I - e^{-AT\varepsilon} \right) B \right\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_n^{(1)}; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + A^{-1} \left( I - e^{-AT\varepsilon_n^{(1)}} \right) B + \right. \\ \left. + A^{-1} \left( e^{-AT\varepsilon} - e^{-AT\varepsilon_n^{(1)}} \right) B \right\} & \text{при } \varepsilon_n^{(1)} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_n^{(2)}; \\ e^{AT\varepsilon} \left\{ X[nT] + A^{-1} \left( I - e^{-AT\varepsilon_n^{(1)}} \right) B + \right. \\ \left. + A^{-1} \left( e^{-AT\varepsilon_n^{(2)}} - e^{-AT\varepsilon_n^{(1)}} \right) B + \right. \\ \left. + A^{-1} \left( e^{-AT\varepsilon_n^{(2)}} - e^{-AT\varepsilon} \right) B \right\} & \text{при } \varepsilon_n^{(2)} \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases} \quad (7.60)$$

Откуда

$$X[(n+1)T] = e^{AT} \left\{ X[nT] + A^{-1} \left( I - e^{-AT\varepsilon_n^{(1)}} \right) B + \right. \\ \left. + A^{-1} \left( e^{-AT\varepsilon_n^{(2)}} - e^{-AT\varepsilon_n^{(1)}} \right) B + A^{-1} \left( e^{-AT\varepsilon_n^{(2)}} - e^{-AT\varepsilon} \right) B \right\}. \quad (7.61)$$

Здесь  $\varepsilon_n^{(1)}$  и  $\varepsilon_n^{(2)}$  определяются входным сигналом  $x_{\text{вх}}(t)$  в соответствии с (7.46) и (7.47). Выражения (7.60), (7.61) и (7.24) составляют систему соотношений, позволяющих в соответствии с рекуррентной процедурой, описанной при однополярной модуляции, рассчитать реакцию импульсной системы на заданный входной сигнал.

## 7.5. Разностные уравнения как модель цифровых систем

Цифровые системы оперируют с сигналами, которые являются функциями дискретного аргумента  $t = nT$ . Диапазон изменения сигнала цифрового устройства определяется его разрядностью. Действительно, если число двоичных разрядов  $N = 16$ , то изменение сигнала

составляет от 0 до  $2^{16} - 1 = 65535$ . «Цена» младшего разряда цифрового устройства относительно максимального значения сигнала при  $N = 16$  не превышает  $(1:65535) \cdot 100 < 0,0015 \%$ . Временная дискретизация непрерывного сигнала, как доказано выше, является линейной операцией. Квантование по уровню в соответствии с (см. рис. 7.4) нелинейно. Однако учитывая, что максимальная погрешность квантования по уровню невелика (см. п. 7.1), ею можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем будем считать, что преобразование непрерывного сигнала в цифровой выполняется линейным оператором.

Модель цифрового устройства опишем оператором  $L$ , преобразующим входной сигнал  $u[nT]$  в выходной —  $x[nT]$ , т.е.

$$x[nT] = L\{u[nT]\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.62)$$

При этом условимся, что  $u[nT] = 0$  при  $n < 0$ . Рассмотрим ряд операторов, аналогичных операторам, используемых при описании непрерывных систем.

Аналогом производных для дискретных функций являются разности. Из последовательности функций  $u[0]$ ,  $u[T]$ ,  $u[2T]$ , ... получим прямые разности 1-го порядка (или первые разности):

$$\Delta u[nT] = u[(n+1)T] - u[nT]. \quad (7.63)$$

В дальнейшем для простоты записи сомножитель  $T$  будем опускать:

$$\begin{aligned} \Delta u[0] &= u[1] - u[0]; \\ \Delta u[1] &= u[2] - u[1]; \\ &\dots \end{aligned}$$

Из последовательности прямых первых разностей образуется последовательность прямых вторых разностей (или разностей второго порядка):

$$\Delta^2 u[n] = \Delta u[n-1] - \Delta u[n], \quad (7.64)$$

т.е.

$$\begin{aligned} \Delta^2 u[0] &= \Delta u[1] - \Delta u[0]; \\ \Delta^2 u[1] &= \Delta u[2] - \Delta u[1]; \\ &\dots \end{aligned}$$



Соответственно, прямая разность порядка  $r$  равна:

$$\Delta^r u[n] = \Delta^{r-1} u[n+1] - \Delta^{r-1} u[n]. \quad (7.65)$$

Подставляя в правую часть (7.65) выражение разности  $(r-1)$  порядка и т.д. до разности 1-го порядка, в соответствии с (7.63) получим:

$$\Delta^r u[n] = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_r^k u[n+r-k], \quad (7.66)$$

где  $C_r^k = \frac{r!}{(r-k)!k!}$  — число сочетаний из  $r$  по  $k$ .

Первая обратная разность определяется как

$$\nabla u[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (7.67)$$

Из последовательностей первых обратных разностей образуется последовательность вторых разностей:

$$\nabla^2 u[n] = \nabla u[n] - \nabla u[n-1]. \quad (7.68)$$

Соответственно обратная разность порядка  $r$

$$\nabla^r u[n] = \nabla^{r-1} u[n] - \nabla^{r-1} u[n-1]. \quad (7.69)$$

Подставляя в правую часть этого выражения формулы обратных разностей более низких порядков вплоть до первого, получаем:

$$\nabla^r u[n] = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_r^k u[n-k]. \quad (7.70)$$

Если разности являются аналогами производных, то соответственно суммы являются аналогами интегралов. По определению

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n-1} u[m]. \quad (7.71)$$

Учитывая, что  $u[m] = 0$  при  $m < 0$ ,  $x[0] = 0$ .

Суммирование — операция, обратная получению разностей. Действительно,

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n] = \sum_{m=0}^{m=n} u[m] - \sum_{m=0}^{m=n-1} u[m] = u[n].$$

**Пример 7.4**

1. Определить первую прямую разность для функции  $u[n] = n^2$ :

$$\Delta u[n] = u[n+1] - u[n] = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1.$$

2. Определить прямые разности для функции  $u[n] = e^{-\alpha n}$ :

$$\Delta u[n] = e^{-\alpha(n+1)} - e^{-\alpha n} = (e^{-\alpha} - 1)e^{-\alpha n};$$

$$\Delta^2 u[n] = (e^{-\alpha} - 1)e^{-\alpha(n+1)} - (e^{-\alpha} - 1)e^{-\alpha n} = (e^{-\alpha} - 1)^2 e^{-\alpha n};$$

.....

$$\Delta^r u[n] = (e^{-\alpha} - 1)^r e^{-\alpha n}.$$

3. Определить сумму функции  $u[n] = n$ :

$$x[n] = \sum_{m=0}^{m=n-1} m = 0 + 1 + 2 + \dots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

(сумма получена по формуле суммы арифметической прогрессии).

4. Определить первую прямую разность функции  $x[n] = \frac{n(n-1)}{2}$ :

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n] = \frac{(n+1)n}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = n.$$

Этот результат иллюстрирует то, что операция получения первой прямой разности обратна операции суммирования (см. п. 3).

5. Определить сумму функции  $u[n] = (1 - e^{-\alpha}) e^{-\alpha n}$ :

$$x[n] = \sum_{m=0}^{m=n-1} (1 - e^{-\alpha}) e^{-\alpha m}.$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x[n] = (1 - e^{-\alpha}) \sum_{m=0}^{m=n-1} e^{-\alpha m} = 1 - e^{-\alpha n}.$$

6. Определим первую прямую разность функции  $x[n] = 1 - e^{-\alpha n}$ :

$$\Delta x[n] = 1 - e^{-\alpha(n+1)} - 1 + e^{-\alpha n} = (1 - e^{-\alpha})e^{-\alpha n}.$$

Этот результат еще раз иллюстрирует, что операция получения первой прямой разности обратна операции суммирования (см. п. 5).

Процессы в цифровых системах могут быть описаны разностными уравнениями. При использовании прямых разностей *линейным неоднородным разностным уравнением (уравнением в конечных разностях) с постоянными коэффициентами* называют уравнение вида:

$$a'_0 \Delta^r x[n] + a'_1 \Delta^{r-1} x[n] + \dots + a'_{r-1} \Delta x[n] + a'_r x[n] = u[n]. \quad (7.72)$$

При  $u[n] = 0$  уравнение (7.72) называется однородным. Используя выражение (7.66), разностному уравнению (7.72) можно придать другую форму:

$$a_0 x[n+r] + a_1 x[n+r-1] + \dots + a_{r-1} x[n+1] + a_r x[n] = u[n], \quad (7.73)$$

где  $a_i$  — постоянные коэффициенты, равные в соответствии с (7.66) линейной комбинации  $a'_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, r$ :

$$a_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} a'_k C_{r-k}^{i-k}. \quad (7.74)$$

При использовании обратных разностей неоднородным линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a'_0 \nabla^r x[n] + a'_1 \nabla^{r-1} x[n-1] + \dots + a'_{r-1} \nabla x[n] + a'_r x[n] = u[n]. \quad (7.75)$$

Используя выражение (7.70), разностному уравнению можно придать другую форму:

$$a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_{r-1} x[n-r+1] + a_r x[n-r] = u[n], \quad (7.76)$$

где

$$a_{r-i} = \sum_{k=0}^i (-1)^{r-i} a'_k C_{r-k}^{i-k}. \quad (7.77)$$

При заданной функции  $u[n]$  уравнение (7.73) представляет рекуррентное соотношение, которое позволяет вычислить  $x[i + 1]$ , если известны  $x[i]$ ,  $x[i + 1]$ , ...,  $x[i - r]$ . Рассмотрим это на примере. Пусть разностное уравнение имеет вид:

$$a_0x[n + 3] + a_1x[n + 2] + a_2x[n + 1] + a_3x[n] = u[n], \quad (7.78)$$

где  $u[n] = kTn + c$ .

Начальные условия, т.е. значение  $x[i]$  при  $i = 0, 1, 2, \dots, r - 1$ , заданы:  $x[0] = b_0$ ;  $x[1] = b_1$ ;  $x[2] = b_2$ . Требуется определить значения  $x[n]$ , удовлетворяющие уравнению (7.78). При  $n = 0$  уравнение (7.78) имеет вид:

$$a_0x[3] + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = c.$$

Откуда

$$x[3] = \frac{1}{a_0}[c - a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_0]. \quad (7.79)$$

При  $n = 1$  уравнение (7.78) имеет вид:

$$a_0x[4] + a_1x[3] + a_2x[2] + a_3x[1] = kT + c.$$

В этом уравнении  $x[1] = b_1$  и  $x[2] = b_2$ ,  $x[3]$  определено на предыдущем шаге (см. выражение 7.79). Следовательно,

$$x[4] = \frac{1}{a_0} \left\{ kT + c - a_1x[3] - a_2x[2] - a_3x[1] \right\}.$$

Подобным образом вычисляют значения  $x[5]$  при  $n = 2$ ,  $x[6]$  при  $n = 3$  и т.д.

Таким образом, при известных начальных условиях приведенная рекуррентная процедура дает решение линейного разностного уравнения (7.73). Аналогично реализуется рекуррентная процедура для определения  $x[n]$ , когда разностное уравнение задано в виде (7.76), при известных значениях  $x[n - 1]$ ,  $x[n - 2]$ , ...,  $x[n - r]$ . Вместе с тем решение разностных уравнений может быть осуществлено различными способами, в том числе использующими так называемое дискретное преобразование Лапласа (D-преобразование) или Z-преобразование.

## 7.6. Дискретные преобразования Лапласа

**Прямое  $D$ -преобразование и  $Z$ -преобразование.** Распространим преобразование Лапласа на решетчатые функции, определяемые выражением (7.6). Изображение по Лапласу  $y[nT]$  имеет вид:

$$\begin{aligned} L\{y[nT]\} &= L\left\{x_{\text{BX}}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)\right\} = \int_0^{\infty} x_{\text{BX}}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x_{\text{BX}}(t) \delta(t - nT) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Откуда в соответствии со свойством  $\delta$ -функции

$$\int_0^{\infty} x_{\text{BX}}(t) \delta(t - nT) e^{-pt} dt = x[nT] e^{-pnT}.$$

Следовательно, изображение по Лапласу решетчатой функции  $y[nT]$  имеет вид:

$$L\{y[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{BX}}[nT] e^{-pnT}. \quad (7.80)$$

На основании этого выражения можно говорить о *дискретном преобразовании Лапласа* — иначе  $D$ -преобразовании оригинала — перехода функции дискретного аргумента  $x_{\text{BX}}[nT]$  в изображение — функцию комплексной переменной [14]. Отбросив нижний индекс в обозначении функции  $x_{\text{BX}}[nT]$  и положив  $q = pT$ , запишем формулу  $D$ -преобразования:

$$D\{x[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-qn}. \quad (7.81)$$

Если обозначить  $e^q = z$ , то правую часть выражения (7.81) можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}. \quad (7.82)$$

Такое преобразование оригинала  $x[n]$  в изображение  $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$  принято называть  $Z$ -преобразованием.

Рассмотрим далее непрерывный сигнал  $x(t) = x[(n + \varepsilon)T] = x[n, \varepsilon]$ .

Такая форма записи в относительном времени  $\frac{t}{T} = n + \varepsilon$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  уже использовалась ранее при рассмотрении разомкнутых импульсных систем. Тогда непрерывный сигнал можно трактовать как совокупность бесконечного числа функций дискретного аргумента  $n$ , каждая из которых имеет номер  $\varepsilon$  из бесконечного числа номеров между нулем и единицей. Для каждой функции дискретного аргумента, номер которой  $\varepsilon$ , можно воспользоваться формулой  $D$ -преобразования, т.е.

$$D\{x[(n + \varepsilon)T]\} = D\{x[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n, \varepsilon]e^{-qn}. \quad (7.83)$$

В дальнейшем  $D$ -изображение сигнала  $x[n]$  будем обозначать  $x^*(q)$ , а изображение сигнала  $x[n, \varepsilon]$  соответственно  $x^*(q, \varepsilon)$ . Преобразование оригинала в изображение будем называть прямым  $D$ -преобразованием. Если используется формула (7.82), то такое преобразование  $x[n]$  в  $x^*(z)$  называют прямым  $Z$ -преобразованием.

Переход от изображений к оригиналам называют обратным  $D$ -преобразованием (или обратным  $Z$ -преобразованием).

Для того чтобы изображение функции дискретного аргумента было определено, нужно потребовать, чтобы ряды (7.81), (7.76), (7.83) были сходящимися. Можно доказать, что если эти ряды сходятся при  $\operatorname{Re} q = \sigma_0$ , где  $\operatorname{Re} q$  — действительная часть комплексного числа  $q$ , то они также сходятся и притом абсолютно и равномерно при всех  $q$ , удовлетворяющих условию  $\operatorname{Re} q > \sigma_0$ . Значения  $\sigma_c$ , для которого при  $\sigma > \sigma_c$  рассматриваемые ряды сходятся, а при  $\sigma < \sigma_c$  — расходятся, называются абсциссой сходимости.

### Пример 7.5

Найти  $D$ -преобразование и  $Z$ -преобразование сигнала  $x[n] = 1[n]$ .

Подставив  $x[n]$  в (7.83), получим:

$$x^*(q) = D\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1[n]e^{-qn}. \quad (7.84)$$

Если  $\operatorname{Re} q > 0$ , то ряд (7.84) сходится, и сумму этого ряда можно вычислить, воспользовавшись формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии. Тогда

$$x^*(q) = \frac{1}{1 - e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}. \quad (7.85)$$

Так как  $e^q = z$ , то

$$x^*(z) = \frac{z}{z - 1}. \quad (7.86)$$

**Пример 7.6**

Найти  $D$ -преобразование и  $Z$ -преобразование сигнала  $x[n, \varepsilon] = \varepsilon^{\alpha(n+\varepsilon)T}$ . Подставляем  $x[n, \varepsilon]$  в выражение (7.83):

$$D\{x[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha(n+\varepsilon)T} e^{-qn}.$$

Этот ряд сходится при  $\operatorname{Re} q > \alpha T$ . В результате суммирования получаем:

$$x^*(q, \varepsilon) = \frac{e^{\alpha T \varepsilon}}{1 - e^{-(q - \alpha T)}} = \frac{e^q e^{\alpha T \varepsilon}}{e^q - e^{\alpha T}}. \quad (7.87)$$

При  $\varepsilon = 0$

$$x^*(q) = \frac{e^q}{e^q - e^{\alpha T}}. \quad (7.88)$$

При  $e^q = z$

$$x^*(z) = \frac{z}{z - e^{\alpha T}}. \quad (7.89)$$

Итак, можно подвести некоторые итоги. Определяя решетчатую функцию в соответствии с выражением (7.6) как последовательность  $\delta$ -функций с «весами», равными значению функций дискретного аргумента  $x[n]$ , и применяя к решетчатой функции обычное преобразование Лапласа, мы получили  $D$ -преобразование (дискретное преобразование Лапласа) функции дискретного аргумента  $x[nT]$  в соответствии с выражением (7.81). Рассматривая функцию  $x[n, \varepsilon]$  как смещенную на  $\varepsilon$  функцию дискретного аргумента  $n$  с параметром смещения  $\varepsilon$ , получено  $D$ -преобразование этой функции

в соответствии с выражением (7.83). И наконец, после введения обозначения  $z = e^q$  получено  $Z$ -преобразование функции дискретного аргумента. Для того чтобы отличить изображение функции дискретного аргумента от изображения функции при обычном преобразовании Лапласа, используется верхний индекс  $*$  (см., например, выражение 7.84, 7.85, 7.86).

Рассмотрим далее свойства  $D$ -преобразования. Очевидно, что они аналогично могут быть сформулированы и для  $Z$ -преобразования.

1. *Изображение линейной комбинации функций дискретного аргумента равно линейной комбинации их изображений.*

$$\begin{aligned} \text{Действительно, если } x[n, \varepsilon] &= \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i[n, \varepsilon], \text{ то} \\ D\{x[n, \varepsilon]\} &= \sum_{n=0}^m \left\{ \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i[n, \varepsilon] \right\} e^{-qn} = \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i \sum_{n=0}^{\infty} x_i[n, \varepsilon] e^{-qn} = \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^*[q, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (7.90)$$

2. *Действительная (мнимая) часть изображения комплексной функции дискретного аргумента равна изображению ее действительной (мнимой) части.*

Пусть

$$x[n, \varepsilon] = x_1[n, \varepsilon] + jx_2[n, \varepsilon],$$

где  $x_1[n, \varepsilon] = \operatorname{Re} x[n, \varepsilon]$  — действительная часть;

$x_2[n, \varepsilon] = \operatorname{Im} x[n, \varepsilon]$  — мнимая часть.

Тогда на основании (7.90) получаем:

$$D\{x[n, \varepsilon]\} = D\{x_1[n, \varepsilon]\} + jD\{x_2[n, \varepsilon]\}.$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{Re} D\{x[n, \varepsilon]\} = D\{x_1[n, \varepsilon]\}; \quad (7.91)$$

$$\operatorname{Im} D\{x[n, \varepsilon]\} = D\{x_2[n, \varepsilon]\}. \quad (7.92)$$



3. Если  $D\{x[n, \varepsilon]\} = x^*(q, \varepsilon)$ , то

$$D\{x[n+k, \varepsilon]\} = e^{qk} \left\{ x^*(q, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{k-1} e^{-qr} x[r, \varepsilon] \right\}, \quad (7.93)$$

где  $k$  — целое число.

В частном случае, если  $x[0, \varepsilon] = x[1, \varepsilon] = \dots = x[k-1, \varepsilon] = 0$ , т.е. функция дискретного аргумента при  $n < k$  тождественно равняется нулю, то из (7.93) следует:

$$D\{x[n+k, \varepsilon]\} = e^{qk} x^*(q, \varepsilon). \quad (7.94)$$

Докажем справедливость выражения (7.94).

По определению

$$D\{x[n+k, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k, \varepsilon] e^{-qn}.$$

Обозначив  $n+k=r$ , получаем:

$$\begin{aligned} D\{x[n+k, \varepsilon]\} &= \sum_{r=k}^{\infty} x[r, \varepsilon] e^{-q(r-k)} = \\ &= e^{qk} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} x[r, \varepsilon] - \sum_{r=0}^{k-1} e^{-qr} x[r, \varepsilon] \right\} = e^{qk} \left\{ x^*(q, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{k-1} e^{-qr} x[r, \varepsilon] \right\}, \end{aligned}$$

что совпадает с (7.93).

4. Если  $D\{x[n, \varepsilon]\} = x^*(q, \varepsilon)$ , то

$$D\{x[n-k, \varepsilon]\} = e^{-qk} \left\{ x^*(q, \varepsilon) + \sum_{r=1}^k e^{qr} x[-r, \varepsilon] \right\}. \quad (7.95)$$

В частности, если  $x[-1, \varepsilon] = x[-2, \varepsilon] = \dots = x[-k, \varepsilon] = 0$ , т.е.  $x[n-k, \varepsilon] = 0$  при  $n < k$ , то из (7.95) следует:

$$D\{x[n-k, \varepsilon]\} = e^{-qk} x^*(q, \varepsilon). \quad (7.96)$$

Докажем справедливость выражения (7.95). По определению

$$D\{x[n-k, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k, \varepsilon] e^{-qn}.$$

Обозначив  $n-k=r$ , получаем:

$$D\{x[n-k, \varepsilon]\} = \sum_{r=-k}^{\infty} x[r, \varepsilon] e^{-(r+k)q} = e^{-qk} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} x[r, \varepsilon] e^{-qr} + \sum_{r=-k}^{-1} x[r, \varepsilon] e^{-qr} \right\}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{r=-k}^{-1} x[r, \varepsilon] e^{-qr} = \sum_{r=1}^k x[-r, \varepsilon] e^{-qr},$$

окончательно получаем:

$$D\{x[n-k, \varepsilon]\} = e^{-qk} \left\{ x^*(q, \varepsilon) + \sum_{r=1}^k x[-r, \varepsilon] e^{-qr} \right\},$$

что совпадает с (7.95).

Если выполнено условие  $x[n-k, \varepsilon]$  при  $n < k$ , то выражения (7.94) и (7.96) составляют содержание так называемой *теоремы упреждения и запаздывания*: смещение независимой переменной оригинала на  $\pm k$  соответствует умножению изображения на  $e^{\pm qk}$ . При использовании  $Z$ -преобразования и выполнения указанного выше условия смещению независимой переменной оригинала на  $\pm k$  соответствует умножению изображения на  $z^{\pm k}$ .

5. *Изображение разностей*. Пусть первая разность функции дискретного аргумента

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n].$$

$D$ -преобразование  $\Delta x[n]$  имеет вид:

$$D\{\Delta x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta x[n] e^{-qn} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1] e^{-qn} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-qn}. \quad (7.97)$$

На основании свойства 3 (см. выражение 7.93)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]e^{-qn} = e^q \{x^*(q) - x[0]\}. \quad (7.98)$$

Следовательно, подставив (7.98) в (7.97), получаем:

$$D\{\Delta x[n]\} = e^q \{x^*(q) - x[0]\} - x^*(q) = (e^q - 1)x^*(q) - e^q x[0]. \quad (7.99)$$

Для второй разности  $\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n]$ .

$D$ -преобразование имеет вид:

$$\begin{aligned} D\{\Delta^2 x[n]\} &= e^q \{D(\Delta x[n]) - \Delta x[0]\} - D(\Delta x[n]) = \\ &= e^q \{(e^q - 1)x^*(q) - e^q x(0)\} - e^q \Delta x[0] - \{(e^q - 1)x^*(q) - e^q x(0)\}. \end{aligned}$$

Откуда

$$D\{\Delta^2 x[n]\} = (e^q - 1)^2 x^*(q) - e^q (e^q - 1)x(0) - e^q \Delta x(0). \quad (7.100)$$

Повторяя указанный процесс, находим изображение для  $k$ -й разности функции дискретного аргумента  $x[n]$ :

$$D\{\Delta^k x[n]\} = (e^q - 1)^k x^*(q) - e^q \sum_{v=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-1-v} \Delta^v x[0]. \quad (7.101)$$

В частном случае, когда  $\Delta x[0] = \Delta^2 x[0] = \dots = \Delta^{k-1} x[0] = 0$ ,

$$D\{\Delta^k x[n]\} = (e^q - 1)^k x^*(q). \quad (7.102)$$

На языке  $Z$ -преобразования выражения (7.101) и (7.102) записываются лаконичней:

$$Z[\Delta^k x[n]] = z^k x^*(z) - z \sum_{v=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-v} \Delta^v x[0]. \quad (7.103)$$

Если выполнено условие

$$\Delta x[0] = \Delta^2 x[0] = \dots = \Delta^{k-1} x[0] = 0, \quad (7.104)$$

то

$$Z\{\Delta^k x[n]\} = z^k x^*(z). \quad (7.105)$$

6. *Изображение сумм.* По определению (см. выражение 7.71) сумма функции дискретного аргумента  $x[m]$  имеет вид:

$$S[n] = \sum_{m=0}^{n-1} x[m] \quad (7.106)$$

и  $S[0] = 0$ . Первая разность этой суммы

$$\Delta S[n] = S[n+1] - S[n] = \sum_{m=0}^n x[m] - \sum_{m=0}^{n-1} x[m] = x[n]. \quad (7.107)$$

Изображение этой разности в соответствии с выражением (7.99) и с учетом того, что  $S[0] = 0$ , имеет вид:

$$D\{\Delta S[n]\} = (e^q - 1)S^*(q). \quad (7.108)$$

Вместе с тем, следуя (7.108), получаем:

$$D\{\Delta S[n]\} = D\{x[n]\} = x^*(q). \quad (7.109)$$

Подставив  $x^*(q)$  в левую часть (7.108), получаем:

$$x^*(q) = (e^q - 1)S^*(q).$$

Откуда

$$S^*(q) = \frac{x^*(q)}{e^q - 1}. \quad (7.110)$$

Итак, *D-изображение суммы функции  $x[n]$  дискретного аргумента равно частному от деления изображения этой функции на  $(e^q - 1)$ .*

На языке  $Z$ -преобразования

$$S^*(z) = \frac{x^*(z)}{z - 1}. \quad (7.111)$$

Свойства 5 и 6, сформулированные для  $D$ -преобразования, аналогичны соответствующим теоремам, доказанным для изображений производных и интегралов при обычном преобразовании Лапласа.

7. *Умножение изображений и оригиналов.* Рассмотрим вначале умножение изображений. Пусть даны две функции  $x[n, \varepsilon]$  и  $y[n, \varepsilon]$ .  $D$ -изображение этих функций соответственно  $x^*[q, \varepsilon]$  и  $y^*[q, \varepsilon]$ .

Образует произведение:

$$x^*(q, \varepsilon) \cdot y^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n, \varepsilon] e^{-qn} \sum_{m=0}^{\infty} y[m, \varepsilon] e^{-qm}.$$

Произведя перемножение рядов в правой части равенства при  $\operatorname{Re} q > \sigma_c$ , где  $\sigma_c$  — наибольшая из абсцисс сходимости, получим

$$\begin{aligned} x^*(q, \varepsilon) y^*(q, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \sum_{m=0}^{\infty} y[m, \varepsilon] x[n-m, \varepsilon] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \left\{ \sum_{m=0}^n y[m, \varepsilon] x[n-m, \varepsilon] \right\}. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Откуда следует, что произведению изображений соответствует во временной области дискретная свертка функций  $x[n, \varepsilon]$  и  $y[n, \varepsilon]$ . Действительно, из (7.112) следует, что  $D$ -преобразование любой из сумм

$$\sum_{m=0}^n x[m, \varepsilon] y[n-m, \varepsilon], \quad (7.113)$$

или

$$\sum_{m=0}^n x[n-m, \varepsilon] y[m, \varepsilon] \quad (7.114)$$

равно произведению изображений этих функций.

Обратим внимание на то, что положив в  $x[n, \varepsilon]$  смещение  $\varepsilon = 0$ , получим совпадение выражений (7.113) с (7.4), а (7.114) с (7.10).

Перейдем к умножению оригиналов. Можно доказать следующее:

$$D\{x_1[n, \varepsilon]x_2[n, \varepsilon]\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x_1^*(q-s, \varepsilon)x_2^*(s, \varepsilon)ds, \quad (7.115)$$

где  $x_1^*(q)$ ,  $x_2^*(s)$ , соответственно,  $D$ -изображения функций  $x_1[n, \varepsilon]$  и  $x_2[n, \varepsilon]$ .

Если  $\sigma_{c1}$  и  $\sigma_{c2}$ , соответственно, абсцисса сходимости при определении  $x_1^*(q)$  и  $x_2^*(q)$ , то  $\sigma_{c2} < c < \sigma - \sigma_{c1}$ , где  $c > \sigma_{c1} + \sigma_{c2}$ . Выражение (7.115) называют *формулой свертывания в комплексной области*.

8. *Изменение периода временной дискретизации*. Решим следующую задачу: дана функция  $x[nT]$  дискретного аргумента, ее изображение  $x^*(q)$  вычислено. Требуется найти  $D$ -изображение функции  $x[n\lambda T]$ . Иными словами, требуется найти изображение функции дискретного аргумента с измененным периодом временной дискретизации.

Итак, по определению при  $q = pT$

$$D\{x[n]\} = x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT]e^{-qn}.$$

Тогда

$$D\{x[n\lambda T]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n\lambda T]e^{-q\lambda n} = x_{\lambda}^*(q\lambda). \quad (7.116)$$

Таким образом, чтобы найти изображение функции  $x[n\lambda T]$ , нужно в изображении функции  $x[n]$  заменить аргумент  $q$  на  $\lambda q$  и параметр  $T$  на  $\lambda T$ .

9. *Сумма ординат функции дискретного аргумента*. Пусть функция  $x[n]$  имеет изображение  $x^*(q)$ , причем абсцисса сходимости  $\sigma_c < 0$ . По определению

$$x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-qn}.$$

Откуда

$$\lim_{q \rightarrow 0} x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]. \quad (7.117)$$

Аналогично для смещенной функции

$$\lim_{q \rightarrow 0} x^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n, \varepsilon]. \quad (7.118)$$

Таким образом, сумма ординат функции дискретного аргумента равна значению ее изображения при  $q = 0$ .

В соответствии с (7.118) площадь под графиком функции  $x[n, \varepsilon]$  определяется выражением

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x[n, \varepsilon] d\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x[n, \varepsilon] d\varepsilon = \int_0^1 x^*(0, \varepsilon) d\varepsilon. \quad (7.119)$$

10. *Сумма квадратов ординат.* Для определения суммы квадратов ординат воспользуемся изображением произведения двух функций дискретного аргумента согласно формуле (7.115), положив в ней

$$x_1[n] = x_2[n] = x[n], \quad x_1^*(q) = x_2^*(q) = x^*(q).$$

Тогда

$$D\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x^*(s) x^*(q-s) ds, \quad (7.120)$$

$$(2\sigma_c < \sigma, \quad \sigma_c < c < \sigma - \sigma_c).$$

Применив к (7.120) формулу (7.117), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x^*(s) x^*(-s) ds. \quad (7.121)$$

Аналогично для смещенной функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2[n, \varepsilon] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x^*(s, \varepsilon) x^*(-s, \varepsilon) ds. \quad (7.122)$$

Таким образом, сумма квадратов ординат равна значению интеграла свертывания в комплексной области при  $q = 0$ .

В соответствии с (7.116) площадь под графиком функции  $x^2[n, \varepsilon]$  определяется выражением

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^2[n, \varepsilon] d\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} x^2[n, \varepsilon] d\varepsilon \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \int_0^1 x^*(s, \varepsilon) x^*(-s, \varepsilon) d\varepsilon ds. \quad (7.123)$$

11. *Предельные значения функции дискретного аргумента.* Предельное значение функции дискретного аргумента определим как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n, \varepsilon]$ .

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n, \varepsilon] = \lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1) x^*(q, \varepsilon). \quad (7.124)$$

В соответствии с выражением (7.100)

$$D\{\Delta x[n, \varepsilon]\} = (e^q - 1) x^*(q, \varepsilon) - e^q x[0, \varepsilon], \quad (7.125)$$

где  $\Delta x[n, \varepsilon]$  — первая разность.

Согласно выражению (7.117)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta x[n, \varepsilon] = \lim_{q \rightarrow 0} D\{\Delta x[n, \varepsilon]\} = \lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1) x^*(q, \varepsilon) - x[0, \varepsilon]. \quad (7.126)$$

Но

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta x[n, \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} \{x[n+1, \varepsilon] - x[n, \varepsilon]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n, \varepsilon] - x[0, \varepsilon]. \quad (7.127)$$

Из (7.126) и (7.127) следует выражение (7.124), что и требовалось доказать.

Начальное значение функции дискретного аргумента обозначим как  $x[0, \varepsilon]$ .

Докажем, что

$$x[0, \varepsilon] = \lim_{q \rightarrow \infty} x^*(q, \varepsilon). \quad (7.128)$$



Первая разность

$$\Delta x[n-1, \varepsilon] = x[n, \varepsilon] - x[n-1, \varepsilon].$$

Согласно (7.95) и (7.125)

$$\begin{aligned} D\{\Delta x[n-1, \varepsilon]\} &= e^{-q} \{(e^q - 1)x^*(q, \varepsilon) - e^q x[0, \varepsilon]\} = \\ &= (1 - e^{-q})x^*(q, \varepsilon) - x[0, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (7.129)$$

Вместе с тем по определению

$$D\{\Delta x[n-1, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta x[n-1, \varepsilon] e^{-qn}$$

и

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta x[n-1, \varepsilon] e^{-qn} = 0. \quad (7.130)$$

Следовательно, в соответствии с (7.129)

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} D\{\Delta x[n-1, \varepsilon]\} &= \lim_{q \rightarrow \infty} (1 - e^{-q})x^*(q, \varepsilon) - x[0, \varepsilon] = \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} x^*(q, \varepsilon) - x[0, \varepsilon] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость выражения (7.128), которое и требовалось доказать.

Итак, рассмотрены формулы прямого  $D$ -преобразования (получение изображения по оригиналу), изложены свойства этого преобразования.

**Обратное  $D$ -преобразование.** С помощью обратного  $D$ -преобразования можно получить оригинал по заданному изображению. Обозначим обратное преобразование следующим образом:

$$x[n] = D^{-1}\{x^*(q)\},$$

или

$$x[n, \varepsilon] = D^{-1}\{x^*(q, \varepsilon)\}.$$

Пусть

$$x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-qn}. \quad (7.131)$$

Предположим, что особые точки функции  $x^*(q)$  комплексного переменного  $q$  лежат левее отрезка  $L_1$  длиной  $2\pi$ , параллельного мнимой оси и расположенного на расстоянии  $c$  вправо от нее (рис. 7.19). Величина  $c$  — произвольная положительная постоянная, бóльшая абсциссы сходимости  $\sigma_c$ . Умножив обе части (7.131) на  $e^{qm}$  ( $m$  — целое число) и проинтегрировав их вдоль отрезка  $L_1$ , получаем:

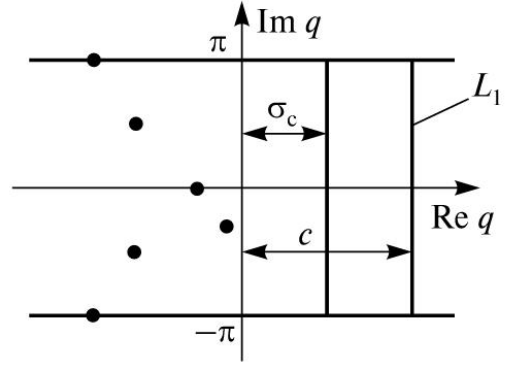


Рис. 7.19. Отображение числа  $q$  на комплексной плоскости

$$\begin{aligned} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x^*(q)e^{qm} dq &= \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} x[n] \right\} e^{qm} dq = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} e^{-q(n-m)} dq. \end{aligned} \quad (7.132)$$

Перестановка операций интегрирования и суммирования законна, так как  $c < \sigma_c$  — абсциссы сходимости  $x[n]$ . Если  $m \neq n$ ,

$$\int_{c-j\pi}^{c+j\pi} e^{-q(n-m)} dq = \left[ -\frac{1}{n-m} e^{-q(n-m)} \right]_{c-j\pi}^{c+j\pi} = \frac{e^{-c(n-m)}}{n-m} \left[ e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)} \right] = 0.$$

Если  $n = m$ , то

$$\int_{c-j\pi}^{c+j\pi} dq = (c + j\pi) - (c - j\pi) = 2\pi j.$$

Следовательно, из (7.132) получим:

$$\int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x^*(q)e^{qm} dq = x[m]2\pi j$$

или, заменяя переменную  $m$  на переменную  $n$ , окончательно имеем:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x^*(q) e^{qn} dq. \quad (7.133)$$

Аналогично, для смещенной функции дискретного аргумента

$$x[n, \epsilon] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} x^*(q, \epsilon) e^{qn} dq. \quad (7.134)$$

Эти формулы, называемые *формулами обращения*, решают задачу обратного  $D$ -преобразования. Они аналогичны формуле обращения в обычном преобразовании Лапласа.

Предположим, что изображение  $x^*(q)$  может быть приведено к виду

$$x^*(q) = \frac{H^*(q)}{G^*(q)}, \quad (7.135)$$

где  $H^*(q) = a_0 + a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \dots + a_l e^{lq}$ ;

$G^*(q) = b_0 + b_1 e^q + b_2 e^{2q} + \dots + b_r e^{rq}$ , степень  $l$  меньше степени  $r$ .

Обозначим  $e^q = z$ , тогда

$$H^*(q) = a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l;$$

$$G^*(q) = b_0 + b_1 z + \dots + b_r z^r.$$

Предположим далее, что уравнение

$$G^*(z) = 0 \quad (7.136)$$

имеет только простые корни  $(z_1, z_2, \dots, z_r)$ . Тогда можно доказать, что

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0 \\ \sum_{v=1}^r \frac{H^*(z_v)}{\dot{G}^*(z_v)} z_v^{n-1}, & \end{cases} \quad (7.137)$$

где  $\dot{G}^*(z_v) = \left. \frac{dG^*}{dz} \right|_{z=z_v}$ .

Равенство  $x[0] = 0$  следует из того, что в соответствии с (7.128)  $x[0] = 0$ , когда степень многочлена знаменателя изображения (7.135) выше степени числителя многочлена.

Если степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя, то, разделив числитель на знаменатель, получаем сумму двух составляющих, одна из которых число  $A$ , другая — дробно-рациональный остаток  $\frac{H_0^*(z)}{G^*(z)}$ , где степень многочлена  $H_0^*(z)$  меньше степени многочлена  $G^*(z)$ , т.е.

$$x^*(z) = A + \frac{H_0^*(z)}{G^*(z)}. \quad (7.138)$$

В соответствии с выражением (7.128), учитывая, что  $z = e^q$  и, следовательно,  $\lim_{q \rightarrow \infty} z = \infty$ , получаем:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} x^*(z) = A + \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{H_0^*(z)}{G^*(z)} = A.$$

Предел второго слагаемого при  $z \rightarrow \infty$  равен 0, так как степень многочлена его знаменателя выше степени многочлена числителя. Отсюда формула (7.138) имеет вид:

$$x^*(z) = x[0] + \frac{H_0^*(z)}{G^*(z)}. \quad (7.139)$$

Рассмотрим далее общий случай, когда уравнение (7.136) имеет кратные корни:

$$\begin{aligned} z_1 & \text{ кратности } r_1; \\ z_2 & \text{ кратности } r_2; \\ & \dots\dots\dots \\ z_s & \text{ кратности } r_s. \end{aligned}$$

Причем  $\sum_{i=1}^s r_i$  равно  $r$ -степени многочлена  $G^*(z)$ , а степень  $G^*(z)$  выше степени  $H^*(z)$ .

Тогда

$$x[n] = \sum_{v=1}^S \sum_{\mu=0}^{r_v-1} c_{\mu v} \frac{n^{(\mu)}}{\mu!} z_v^{n-\mu}, \quad (7.140)$$

где  $n^{(\mu)} = n(n-1)(n-2) \dots (n-\mu+1)$ ;  $n^{(0)} = 1$ ,

$$c_{\mu v} = \frac{1}{(r_v - \mu - 1)!} \frac{d^{r_v - \mu - 1}}{dz^{r_v - \mu - 1}} \left\{ \frac{H^*(z)}{z G^*(z)} \cdot (z - z_v)^{r_v} \right\}_z = z_v. \quad (7.141)$$

В частном случае, когда все корни различны, т.е.  $r_v = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $S = r$ ,

$$c_{v0} = \frac{H^*(z_v)}{z_v \dot{G}^*(z_v)}.$$

Следовательно,

$$x[n] = \sum_{v=1}^r \frac{H^*(z_v)}{z_v \dot{G}^*(z_v)} z_v^n = \sum_{v=1}^r \frac{H^*(z_v)}{\dot{G}^*(z_v)} z_v^{n-1},$$

что при  $n \geq 1$  совпадает с (7.137); при  $n = 0$   $x[0] = 0$ , что следует из (7.137), когда степень многочлена знаменателя (7.135) выше степени многочлена числителя.

Если степень многочлена знаменателя (7.135) равна степени многочлена числителя, то результат деления числителя на знаменатель — многочлен нулевой степени — это значение оригинала при  $n = 0$  (см. выражение 7.139). Оригинал второго слагаемого выражения (7.139), когда имеются кратные корни, при  $n \geq 1$  находится по формуле (7.140).

Преобразование изображений в смещенную функцию  $x[n, \varepsilon]$  дискретного аргумента осуществляется аналогично. При этом  $\varepsilon$  трактуется как параметр.

#### **Пример 7.7**

Пусть

$$x^*(q, \varepsilon) = \frac{e^q e^{\alpha \varepsilon}}{e^q - e^\alpha}. \quad (7.142)$$

Требуется найти оригинал-функцию  $x[n, \varepsilon]$ .

Введем обозначения  $e^q = z$ . Тогда

$$x^*(z, \varepsilon) = \frac{ze^{\alpha\varepsilon}}{z - e^{\alpha}}. \quad (7.143)$$

Здесь степень числителя равна степени знаменателя. Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$x^*(z, \varepsilon) = e^{\alpha\varepsilon} + \frac{e^{\alpha}e^{\alpha\varepsilon}}{z - e^{\alpha}}.$$

В соответствии с (7.139)

$$x[0, \varepsilon] = e^{\alpha\varepsilon}. \quad (7.144)$$

Для вычисления  $x[n, \varepsilon]$  при  $n \geq 1$  определим корни многочлена знаменателя:

$$z - e^{\alpha} = 0.$$

Откуда  $z_1 = e^{\alpha}$ .

В соответствии с выражением (7.137)

$$x[n, \varepsilon] = \frac{e^{\alpha}e^{\alpha\varepsilon}}{1} e^{\alpha(n-1)} = e^{\alpha(n+\varepsilon)}.$$

## 7.7. Определение реакции системы, модель которой задана линейными разностными уравнениями, на входной сигнал

Моделью цифрового устройства, когда погрешностью от квантования по уровню можно пренебречь, является оператор, преобразующий входной сигнал  $u[nT]$  в выходной сигнал  $x[nT]$  (см. выражение (7.62)). Если оператор является линейным и стационарным, то процессы в цифровом устройстве могут быть описаны линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. Определение реакции системы на заданный входной сигнал сводится к решению неоднородного разностного уравнения. Рекуррентная процедура решения такого уравнения описана в п. 7.3. В данном разделе рассмотрим иной способ решения, базирующийся на использовании дискретного преобразования Лапласа ( $D$ -преобразования) и  $Z$ -преобразования.

Пусть модель системы задана разностным уравнением (7.73):

$$a_0 x[n+r] + a_1 x[n+r-1] + \dots + a_{r-1} x[n+1] + a_r x[n] = u[n],$$

где  $u[nT]$  — сигнал на входе системы;

$x[nT]$  — сигнал на выходе системы.

Начальные условия известны:  $x[0] = x_0, x[1] = x_1, \dots, x[r-1] = x_{r-1}$ .  
В соответствии с теоремой упрещения (см. выражение (7.93) при  $\varepsilon = 0$ )

$$D\{x[n+k]\} = e^{qk} \left\{ x^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} e^{-qr} x[r] \right\}.$$

С учетом этого соотношения применим  $D$ -преобразование левой и правой части разностного уравнения:

$$\begin{aligned} & \left( a_0 e^{qr} + a_1 e^{q(r-1)} + \dots + a_{r-1} e^q + a_r \right) x^*(q) - a_0 \sum_{i=0}^{r-1} e^{q(r-i)} x[i] - \\ & - a_1 \sum_{i=0}^{r-2} e^{q(r-1-i)} x[i] - \dots - a_{r-1} x[0] = u^*(q). \end{aligned}$$

Откуда  $D$ -изображение сигнала на выходе системы имеет вид:

$$x^*(q) = \frac{u^*(q)}{a_0 e^{qr} + a_1 e^{q(r-1)} + \dots + a_{r-1} e^q + a_r} + \frac{B^*(q)}{a_0 e^{qr} + a_1 e^{q(r-1)} + \dots + a_{r-1} e^q + a_r},$$

где первое слагаемое определяет процессы в системе, вызванные входным сигналом при нулевых условиях, второе — начальными условиями:

$$B^*(q) = a_0 \sum_{i=0}^{r-1} e^{q(r-i)} x[i] + a_1 \sum_{i=0}^{r-2} e^{q(r-1-i)} x[i] + \dots + a_{r-1} x[0].$$

При нулевых начальных условиях  $B^*(q) = 0$ .

Для перехода от изображения к оригиналам удобней вначале перейти к  $Z$ -изображению, обозначив  $e^q = z$ .

Тогда

$$x^*(z) = \frac{u^*(z)}{a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_{r-1} z + a_r} + \frac{B^*(z)}{a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_{r-1} z + a_r},$$

где

$$B^*(z) = a_0 \sum_{i=0}^{r-1} z^{r-i} x[i] + a_1 \sum_{i=0}^{r-2} z^{r-1-i} x[i] + \dots + a_{r-1} x[0].$$

Переход от изображения  $x^*(z)$  сигнала на выходе системы к оригиналу  $x[n]$  осуществляется в соответствии с (7.137), когда корни многочлена знаменателя — характеристического многочлена — различны. При наличии кратных корней используется формула обращения (7.140).

Пусть модель системы задана разностным уравнением (7.76):

$$a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_{r-1} x[n-r+1] + a_r x[n-r] = u[r].$$

Начальные условия известны:

$$x[-1] = x_{-1}, x[-2] = x_{-2}, \dots, x[-r-1] = x_{-r-1}, \quad x[-r] = x_{-r}.$$

В соответствии с теоремой запаздывания (см. выражение (7.95) при  $\varepsilon = 0$ )

$$D\{x[n-k]\} = e^{-qk} \left\{ x^*(q) + \sum_{r=1}^k e^{qk} x[-r] \right\}.$$

С учетом этого соотношения применим  $D$ -преобразование левой и правой части разностного уравнения:

$$(a_0 + a_1 e^{-q} + a_2 e^{-2q} + \dots + a_r e^{-rq}) x^*(q) + a_1 x[-1] + \\ + a_2 e^{-2q} \left\{ \sum_{i=1}^2 e^{qi} x[-i] \right\} + \dots + a_r e^{-rq} \left\{ \sum_{i=1}^r e^{qi} x[-i] \right\} = u^*(q).$$

Отсюда  $D$ -изображение сигнала на выходе системы имеет вид:

$$x^*(q) = \frac{u^*(q)}{a_0 + a_1 e^{-q} + a_2 e^{-2q} + \dots + a_r e^{-rq}} + \frac{B^*(q)}{a_0 + a_1 e^{-q} + a_2 e^{-2q} + \dots + a_r e^{-rq}}, \quad (7.146)$$

где первое слагаемое определяет процессы в системе, вызванные входным сигналом при нулевых граничных условиях, второе — начальными условиями:

$$B^*(q) = -a_1 x[-1] - a_2 e^{-2q} \left\{ \sum_{i=1}^2 e^{qi} x[-i] \right\} - \dots - a_r e^{-qr} \left\{ \sum_{i=1}^r e^{qi} x[-i] \right\}.$$

Обозначив  $e^q = z$  и умножив числитель и знаменатель (7.146) на  $z^r$ , получаем:

$$x^*(z) = z^r \left\{ \frac{u^*(z)}{a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r} + \frac{B^*(z)}{a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r} \right\}. \quad (7.147)$$



При нулевых начальных условиях  $x[-1] = x[-2] = \dots = [-r] = 0$  второе слагаемое выражения в фигурных скобках равно 0.

Переход от изображения  $x^*(z)$  к оригиналу  $x[n]$  осуществляется по формуле обращения (7.137) или (7.140) вначале для изображения, записанного в фигурных скобках. Затем к аргументу полученного оригинала  $n$  прибавляют  $r$ , что соответствует множителю  $z^r$ , стоящему перед фигурной скобкой.

Рассмотрим решение разностных уравнений на простых примерах.

### Пример 7.8

Разностное уравнение, являющееся моделью системы, задано выражением

$$a'_0 \Delta x[n] + a'_1 x[n] = u[n], \quad (7.148)$$

Входной сигнал

$$u[n] = 1[n]. \quad (7.149)$$

Граничные условия  $x[0] = x_0$ .

Требуется найти реакцию системы на заданный входной сигнал.

Преобразуем разностное уравнение (7.148):

$$a'_0 \{x[n+1] - x[n]\} + a'_1 x[n] = 1[n].$$

Откуда

$$a_0 x[n+1] + a_1 x[n] = 1[n], \quad (7.150)$$

где  $a_0 = a'_0$ ,  $a_1 = a'_1 - a'_0$ .

$D$ -изображение входного сигнала  $1[n]$  уже было получено в примере 7.4 (см. выражение 7.86):

$$D\{1[n]\} = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Запишем  $D$ -изображение левой и правой части уравнения (7.150):

$$a_0 e^q \{x^*(q) - x_0\} + a_1 x^*(q) = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Откуда изображение сигнала на выходе системы имеет вид:

$$x^*(q) = \frac{e^q}{(e^q - 1)(a_0 e^q + a_1)} + \frac{a_0 x_0 e^q}{a_0 e^q + a_1}.$$

Обозначив  $e^q = z$ , получаем:

$$x^*(z) = \frac{z}{(z-1)(a_0 z + a_1)} + \frac{a_0 x_0 z}{a_0 z + a_1}.$$

Корни многочлена знаменателя первого слагаемого равны  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -\frac{a_1}{a_0}$ .

Корень знаменателя второго слагаемого есть  $z_2$ . Используем формулу обращения (7.137). Вначале будем обращать первое слагаемое. В соответствии с (7.137)

$$G^*(z) = (z-1)(a_0z + a_1); \quad \frac{dG^*(z)}{dx} = (a_0z + a_1) + (z-1)a_0;$$

$$\left. \frac{dG^*(z)}{dx} \right|_{z=1} = a_0 + a_1; \quad \left. \frac{dG^*(z)}{dx} \right|_{z=-\frac{a_1}{a_0}} = -(a_1 + a_0).$$

Тогда оригинал первого слагаемого в соответствии с (7.137) имеет вид:

$$\frac{1}{a_0 + a_1} - \frac{-\frac{a_1}{a_0}}{a_0 + a_1} \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^{n-1} = \frac{1}{a_0 + a_1} \left[ 1 - \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^n \right].$$

Получим далее оригинал второго слагаемого. Так как степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя этого слагаемого, то вначале разделим числитель на знаменатель:

$$\frac{a_0 x_0 z}{a_0 z + a_1} = x_0 - \frac{a_1 x_0}{a_0 z + a_1}.$$

Оригинал изображения  $-\frac{a_1 x_0}{a_0 z + a_1}$  найдем в соответствии с (7.137):

$G^*(z) = a_0 z + a_1$ ;  $\frac{dG^*(z)}{dx} = a_0$ , и оригинал имеет вид:

$$-\frac{a_1 x_0}{a_0} \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^{n-1} = x_0 \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^n.$$

В соответствии с (7.139) оригинал второго слагаемого равен:

$$x_0 \quad \text{при } n = 0,$$

$$x_0 \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^n \quad \text{при } n \geq 1.$$

Для получения оригинала второго слагаемого можно было рассуждать иначе: оригинал изображения  $\frac{a_0 x_0 z}{a_0 z + a_1}$  есть оригинал изображения  $\frac{a_0 x_0}{a_0 z + a_1}$ , в котором следует заменить в соответствии с теоремой об упреждении  $n$  на  $n+1$ . Оригиналу изображения  $\frac{a_0 x_0}{a_0 z + a_1}$  найдем в соответствии с (7.137):

$$G^*(z) = a_0 z + a_1; \quad \frac{dG^*(z)}{dG} = a_0;$$

корнем уравнения  $G^*(z) = 0$  является  $z_1 = -a_1/a_0$ ; тогда оригиналом изображения  $\frac{a_0 x_0}{a_0 z + a_1}$  по (7.137) является  $\frac{a_0 x_0}{a_0} \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^{n-1}$ . Заменяя  $n$  на  $n+1$ , получаем оригинал второго слагаемого  $x_0 \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^n$ , что совпадает с полученным ранее иным способом.

Следовательно, результат решения поставленной задачи — оригинал  $x[n]$  имеет вид:

$$x[n] = \frac{1}{a_0 + a_1} \left[ 1 - \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^n \right] + x_0 \left( -\frac{a_1}{a_0} \right)^n.$$

Рассмотрим частный случай решения, когда  $a'_0 = 1; a'_1 = 2; x_0 = 1$ . При этом  $a_0 = a'_0 = 1; a_1 = a'_1 - a'_0 = 2 - 1 = 1$ ; и  $x[n] = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] + (-1)^n$ .

Откуда следует:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, 2, 4, 6, \dots; \\ 0 & \text{при } n = 1, 3, 5, 7, \dots; \end{cases}$$

### Пример 7.9

Разностное уравнение, являющееся моделью системы, задано выражением

$$a'_1 \nabla x[n] + a'_0 x[n] = u[n]. \quad (7.151)$$

Входной сигнал  $u[n] = 1[n]$ .

Граничные условия  $x[-1] = x_{-1}$ .

Требуется найти реакцию системы на заданный входной сигнал.

Преобразуем разностное уравнение (7.151):

$$a'_1 \{x[n] - x[n-1]\} + a'_0 x[n] = 1[n].$$

Откуда

$$a_0 x[n] - a_1 x[n-1] = 1[n],$$

где  $a_0 = a'_1 + a'_0$ ;  $a_1 = a'_1$ .

Запишем  $D$ -преобразование левой и правой части уравнения (7.151), учитывая, что изображение  $u[n] = 1[n]$  уже известно (см. 7.85):

$$a_0 x^*(q) - a_1 e^{-q} x^*(q) - a_1 x[-1] = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Откуда

$$x^*(q) = \frac{e^q}{(e^q - 1)(a_0 - a_1 e^{-q})} + \frac{a_1 x[-1]}{a_0 - a_1 e^{-q}}.$$

Обозначив  $e^q = z$  и умножив числитель и знаменатель этого выражения на  $z$ , получаем:

$$x^*(z) = z \left[ \frac{z}{(z-1)(a_0 z - a_1)} + \frac{a_1 x[-1]}{a_0 z - a_1} \right].$$

Перейдем от изображения, записанного в квадратных скобках, к оригиналу. Корни знаменателя первого слагаемого  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = \frac{a_1}{a_0}$ .

Тогда в соответствии с (7.137) получаем:

$$G^*(z) = (z-1)(a_0 z - a_1); \quad \frac{dG^*(z)}{dz} = (a_0 z - a_1) + (z-1)a_0;$$

$$\left. \frac{dG^*(z)}{dz} \right|_{z=z_1} = a_0 - a_1; \quad \left. \frac{dG^*(z)}{dz} \right|_{z=z_2} = a_1 + a_0.$$

В соответствии с (7.137) оригинал этого изображения имеет вид:

$$\frac{1}{a_0 - a_1} + \frac{\frac{a_1}{a_0}}{a_1 - a_0} \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{n-1} = \frac{1}{a_0 - a_1} \left[ 1 - \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^n \right]. \quad (7.152)$$

В соответствии с (7.137) оригинал второго слагаемого в фигурных скобках изображения  $x^*(z)$  имеет вид:

$$\frac{a_1 x[-1]}{a_0} \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{n-1} = x[-1] \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^n. \quad (7.153)$$

Суммируя (7.152) и (7.153) и заменяя  $n$  на  $n+1$ , получаем искомое решение:

$$x[n] = \frac{1}{a_0 - a_1} \left[ 1 - \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{n+1} \right] + x[-1] \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^{n+1}.$$

Рассмотрим случай, когда разностное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_{r-1} x[n-r+1] + a_r x[n-r] = \\ = b_0 u[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_{l-1} u[n-l+1] + b_l u[n-l], \end{aligned}$$

где  $l \leq r$ .

Входной сигнал подается на вход системы в момент времени  $n = 0$ , т.е.  $u[n] = 0$  при  $n < 0$ , начальные условия — нулевые. Для нахождения решения разностного уравнения используем  $D$ -преобразование левой и правой частей этого уравнения:

$$\begin{aligned} a_0 x^*[q] + a_1 e^{-q} x^*(q) + \dots + a_{r-1} e^{-q(r-1)} x^*(q) + a_r e^{-qr} x^*(q) = \\ = b_0 u^*(q) + b_1 e^{-q} u^*(q) + \dots + b_{l-1} e^{-q(l-1)} u^*(q) + b_l e^{-ql} u^*(q). \end{aligned}$$

Откуда, обозначив  $z = e^q$ , получаем:

$$x^*(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_l e^{-l}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_r z^{-r}} u^*(z) = W^*(z) u^*(z), \quad (7.154)$$

где

$$W^*(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_l e^{-l}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_r z^{-r}}. \quad (7.155)$$

Из (7.154) следует, что

$$W^*(z) = \frac{x^*(z)}{u^*(z)}. \quad (7.156)$$

Выражение (7.156) является дискретной передаточной функцией системы, т.е. отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях.

Изложенное позволяет сделать следующий вывод — реакция системы, моделью которой является разностное уравнение, есть обрат-

ное  $Z$  (или  $D$ )-преобразование произведения дискретной передаточной функции и изображения входного сигнала:

$$x[n] = Z^{-1}[W^*(z)u^*(z)]. \quad (7.157)$$

## 7.8. Передаточная функция разомкнутой линейной импульсной системы

*Амплитудно-импульсная модуляция I рода (АИМ I).* Сигнал  $x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon]$  на выходе линейной импульсной системы, когда на ее вход поступает входной сигнал  $x_{\text{ВХ}}(t)$  при амплитудно-импульсной модуляции I рода, определяется выражением (7.4) или (7.10). Возьмем  $D$ -преобразование от левой и правой частей (7.4):

$$D\{x_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon]\} = D\left\{\sum_{m=0}^n x_{\text{ВХ}}[mT]k[n-m, \varepsilon]\right\}.$$

В соответствии с выражением (7.112)  $D$ -изображение дискретной свертки функции  $x_{\text{ВХ}}[mT]$  и  $k[n-m, \varepsilon]$  равно произведению  $D$ -изображений этих функций. Следовательно,

$$x_{\text{ВЫХ}}^*(q, \varepsilon) = x_{\text{ВХ}}^*(q)W^*(q, \varepsilon), \quad (7.158)$$

где  $W^*(q, \varepsilon) = D\{k[n, \varepsilon], x_{\text{ВХ}}^*(q)\} = D\{x_{\text{ВХ}}[nT]\}$ .

Откуда передаточная функция разомкнутой линейной импульсной системы

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}^*(q, \varepsilon)}{x_{\text{ВХ}}^*(q)}. \quad (7.159)$$

Пусть разомкнутая импульсная система с АИМ I рода имеет эквивалентную передаточную функцию непрерывной части (см. 7.3):

$$W_{\varnothing}(p) = S(p)W(p), \quad (7.160)$$

где  $S(p)$  — изображение по Лапласу функции, описывающей форму импульса;  $W(p)$  — передаточная функция непрерывной части импульсной системы.

Тогда эквивалентная импульсная переходная функция непрерывной части определяется как обратное преобразование Лапласа от  $W_{\varnothing}(p)$ :

$$k_{\varnothing}(t) = L^{-1}\{W_{\varnothing}(p) = S(p)W(p)\}.$$

После перехода к относительному времени  $t = (n + \varepsilon)T$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  получаем  $k_{\varepsilon}[n, \varepsilon]$ .

Передаточная функция разомкнутой импульсной системы с АИМ I рода в соответствии с (7.158) определяется выражением

$$W_{\varepsilon}^*(q, \varepsilon) = D_{\varepsilon}\{k[n, \varepsilon]\}. \quad (7.161)$$

В частном случае, когда импульсы прямоугольной формы длительностью  $t_{\text{и}} = \gamma T$ , где  $0 < \gamma \leq 1$ , эквивалентная импульсная переходная функция непрерывной части системы имеет вид (7.14). Тогда передаточная функция разомкнутой импульсной системы с АИМ I рода и прямоугольными импульсами

$$W_{\varepsilon}^*(q, \varepsilon) = \begin{cases} D\{h_{\Lambda}[n, \varepsilon] - h[n-1, 1 + \varepsilon - \gamma]\} & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \gamma; \\ D\{h_{\Lambda}[n, \varepsilon] - h[n, \varepsilon - \gamma]\} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1, \end{cases}$$

где  $h_{\Lambda}[n, \varepsilon]$  — переходная функция непрерывной части системы.

Изображение сигнала на выходе системы при заданном входном сигнале определяется выражением (7.158). Оригинал сигнала на выходе системы получаем как обратное  $D$ -преобразование изображения (7.158).

#### **Пример 7.10**

Дана передаточная функция  $K(p) = \frac{k}{T_{\Phi} p + 1}$  непрерывной части разомкнутой импульсной системы с АИМ I рода и прямоугольными импульсами длительностью  $\gamma T$ ,  $\gamma < 1$ .

Требуется найти передаточную функцию системы и изображение сигнала на выходе, когда входной сигнал  $x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$ .

Импульсная переходная функция  $k[n, \varepsilon]$  приведенной непрерывной части этой системы получена в примере 7.1 и определяется формулой (7.14). Применяем  $D$ -преобразование к  $k[n, \varepsilon]$ . В примере 7.4 (см. выражение 7.85) получено:

$$D\{1[n]\} = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

В соответствии с теоремой запаздывания

$$D\{1[n-1]\} = \frac{e^{-q} e^q}{e^q - 1} = \frac{1}{e^q - 1}.$$

В примере 7.5 (см. выражение 7.87) получено:

$$D\left\{e^{\alpha(n+\varepsilon)T}\right\} = \frac{e^q e^{\alpha T\varepsilon}}{e^q + e^\alpha}.$$

В соответствии с теоремой о запаздывании

$$D\left\{e^{\alpha(n-1+\varepsilon)T}\right\} = \frac{e^{-q} e^q e^{\alpha T\varepsilon}}{e^q + e^\alpha} = \frac{e^{\alpha T\varepsilon}}{e^q + e^\alpha}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями применительно к (7.14), получаем искомую передаточную функцию разомкнутой импульсной системы:

$$\begin{aligned} W^*(q, \varepsilon) &= \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q e^{-\frac{T}{T_\Phi}\varepsilon}}{e^q - e^{-\frac{T}{T_\Phi}}} - \frac{e^q e^{-q}}{e^q - 1} + \frac{e^q e^{-q}}{e^q - e^{-\frac{T}{T_\Phi}}} e^{-\frac{T}{T_\Phi}(1+\varepsilon-\gamma)} = \\ &= 1 - \frac{e^{-\frac{T}{T_\Phi}\varepsilon} (e^q - e^{-\frac{T}{T_\Phi}(1-\gamma)})}{e^q - e^{-\frac{T}{T_\Phi}}}; \\ K^*(q, \varepsilon) &= \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q e^{-\frac{T}{T_\Phi}\varepsilon}}{e^q - e^{-\frac{T}{T_\Phi}}} - \frac{e^q}{e^q - 1} + \frac{e^q}{e^q - e^{-\frac{T}{T_\Phi}}} e^{-\frac{T}{T_\Phi}(1+\varepsilon-\gamma)} = \\ &= \frac{e^q}{e^q - e^{-\frac{T}{T_\Phi}}} e^{-\frac{T}{T_\Phi}\varepsilon} \left( e^{-\frac{T}{T_\Phi}\gamma} - 1 \right). \end{aligned}$$

Изображение сигнала на выходе системы, когда на ее входе  $1(t)$ , равно:

$$x_{\text{вых}}^*(q) = \begin{cases} \frac{e^q}{e^q - 1} K^*(q, \varepsilon) & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma; \\ \frac{e^q}{e^q - 1} K^*(q, \varepsilon) & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1. \end{cases}$$



Получим далее передаточную функцию для случая, когда разомкнутая импульсная система имеет вид, приведенный на рис. 7.20, *а*. Здесь рассматривается параллельное включение непрерывных частей. Как следует из приведенной структурной схемы,

$$x_{\text{ВЫХ}i}^*(q) = K_i^*(q, \varepsilon) x_{\text{ВХ}}^*(q), \quad i = 1, 2, 3, \dots, g.$$

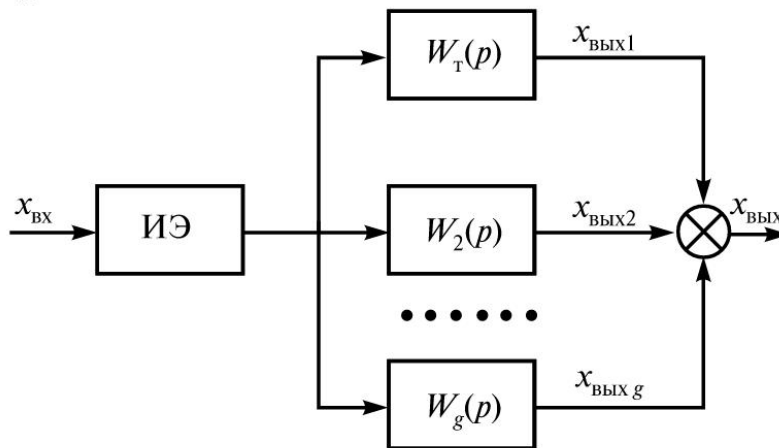
Так как

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_{i=1}^{i=g} x_{\text{ВЫХ}i}(t),$$

то

$$x_{\text{ВЫХ}}^*(q, \varepsilon) = \left[ \sum_{i=1}^{i=g} K_i^*(q, \varepsilon) \right] x_{\text{ВХ}}^*(q).$$

*а*



*б*

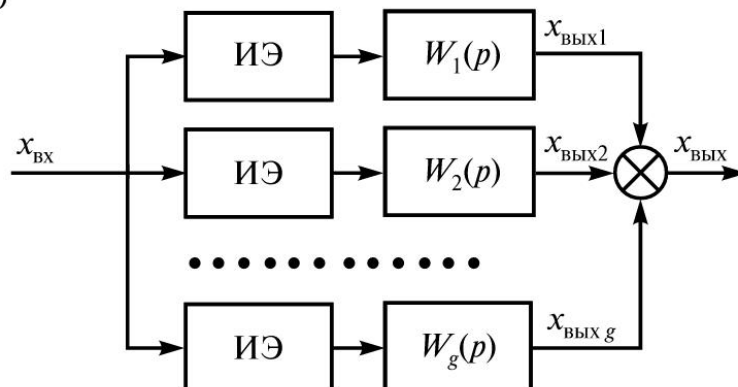


Рис. 7.20. Разомкнутая импульсная система с параллельным включением звеньев непрерывной части (*а*); структурная схема параллельного включения разомкнутых импульсных систем (*б*)

Откуда следует, что передаточная функция такой системы равна сумме передаточных функций параллельных ветвей:

$$K^*(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{i=g} K_i^*(q, \varepsilon). \quad (7.163)$$

На рис. 7.20, б приведена структурная схема параллельного включения разомкнутых импульсных систем. При синхронной работе импульсных элементов она эквивалентна схеме с параллельным включением непрерывных частей (см. рис. 7.20, а). Следовательно, передаточная функция параллельно включенных разомкнутых импульсных систем равна сумме передаточных функций этих систем.

Получим далее передаточную функцию последовательного включения разомкнутых импульсных систем. Структурная схема для этого случая приведена на рис. 7.21, а.

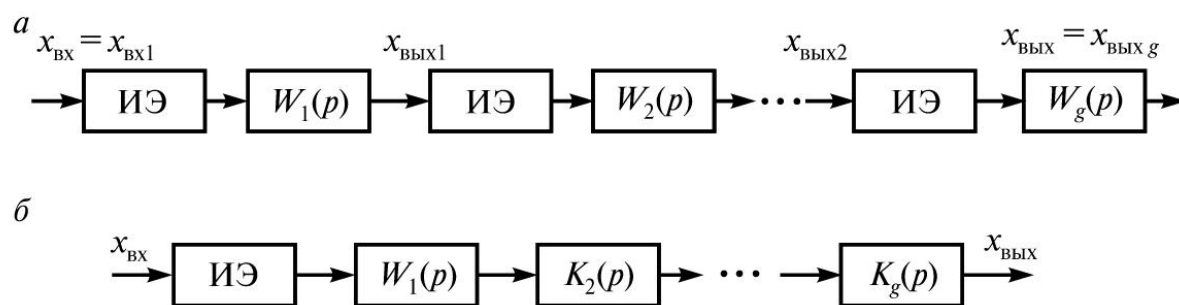


Рис. 7.21. Структурная схема последовательного включения разомкнутых импульсных систем (а), разомкнутая система с последовательным включением звеньев непрерывной части (б)

Рассматривается синхронная работа импульсных элементов. Изображение сигнала на выходе первой системы:

$$x_{\text{ВЫХ}1}^*(q) = x_{\text{BX}1}^*(q)W_1^*(q, \varepsilon),$$

аналогично изображение сигнала на выходе  $i$ -й системы:

$$x_{\text{ВЫХ}i}^*(q) = x_{\text{BX}i}^*(q)W_i^*(q, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, g.$$

Так как

$$x_{\text{BX}i}^*(q) = x_{\text{ВЫХ}(i-1)}^*(q), \quad i = 1, 2, \dots, g,$$

$$\text{то } x_{\text{ВЫХ}}^*(q) = x_{\text{BX}}^*(q) \left[ W_1^*(q, \varepsilon) \cdot W_2^*(q, \varepsilon) \cdot \dots \cdot W_g^*(q, \varepsilon) \right].$$

Откуда передаточная функция последовательного соединения разомкнутых импульсных систем равна произведению передаточных функций этих систем:

$$W^*(q, \varepsilon) = \prod_{i=1}^g W_i^*(q, \varepsilon). \quad (7.164)$$

Этот вывод нельзя использовать при наличии одного импульсного элемента и последовательного включения звеньев (см. рис. 7.21, б). Для такой структурной схемы эквивалентная передаточная функция приведенной непрерывной части системы

$$W_{\vartheta}(p) = W_1(p)W_2(p)\dots W_g(p).$$

Соответствующая импульсная переходная функция

$$k_{\vartheta}(t) = L^{-1}[W_{\vartheta}(p)] = L^{-1}[W_1(p)W_2(p)\dots W_g(p)].$$

Тогда передаточная функция импульсной системы, структурная схема которой приведена на рис. 7.21, б, определяется выражением

$$W_{\vartheta}^*(q, \varepsilon) = D\{k_{\vartheta}[n, \varepsilon]\}. \quad (7.165)$$

**Амплитудно-импульсная модуляция II рода (АИМ II).** Получим далее изображение сигнала на выходе разомкнутой линейной импульсной системы с амплитудно-импульсной модуляцией второго рода (АИМ II). Структурная схема модели системы приведена на рис. 7.13. При обычном преобразовании Лапласа изображение сигнала на входе линейной части системы при АИМ II имеет вид:

$$L[l(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+\gamma)T} x_{\text{BX}}(t) e^{-pt} dt.$$

Перейдя к относительному времени  $t = (n + \varepsilon)T$  и обозначив  $pT = q$ , получим:

$$\begin{aligned} L\{l[t = (n + \varepsilon)T]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\gamma T} x_{\text{BX}}[(n + \varepsilon)T] e^{-p(n+\varepsilon)t} d(\varepsilon T) = \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\gamma} x_{\text{BX}}[n, \varepsilon] e^{-qn} e^{-q\varepsilon} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$L\{l[n, \varepsilon]\} = T \int_0^{\gamma} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{BX}}[n, \varepsilon] e^{-qn} \right\} e^{-q\varepsilon} d\varepsilon,$$

где в правой части выражение в фигурных скобках есть  $D$ -преобразование функции  $x_{\text{BX}}[n, \varepsilon]$ .

Следовательно, изображение в смысле обычного преобразования Лапласа сигнала на входе непрерывной части импульсной системы с АИМ II имеет вид:

$$L\{l[n, \varepsilon]\} = T \int_0^{\gamma} x_{\text{BX}}^*(q, \varepsilon) e^{-q\varepsilon} d\varepsilon. \quad (7.166)$$

Непрерывная часть импульсной системы с АИМ II рода задана передаточной функцией

$$W(p) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-pt} dt,$$

где  $k(t)$  — импульсная характеристика непрерывной линейной части.

После замены переменных  $t = \bar{t}T$  и  $q = pT$  получаем правило перехода от передаточной функции с переменной  $p$  к передаточной функции  $W_H(q)$  переменной  $q$ :

$$W_H(q) = \frac{1}{T} W\left(p = \frac{q}{T}\right). \quad (7.167)$$

Изображение сигнала, в смысле обычного преобразования Лапласа, на выходе линейной импульсной системы с АИМ II рода определяется произведением изображения сигнала на входе непрерывной части (7.166) и передаточной функции (7.167), т.е.

$$x_{\text{ВЫХII}}(q) = \left[ \int_0^{\gamma} x_{\text{BX}}^*(q, \varepsilon) e^{-q\varepsilon} d\varepsilon \right] W\left(p = \frac{q}{T}\right). \quad (7.168)$$

Если пренебречь изменениями верхней части импульса за  $\gamma T$ , т.е. свести АИМ II к АИМ I при прямоугольных импульсах длительностью  $\gamma T$ , то изображение (7.168) примет вид:

$$x_{\text{ВЫХII}}(q) = \left[ \int_0^{\gamma} x_{\text{ВХ}}^*(q, \varepsilon = 0) e^{-q\varepsilon} d\varepsilon \right] W(q). \quad (7.169)$$

Рассмотрим множитель в квадратных скобках:

$$\left[ \int_0^{\gamma} x_{\text{ВХ}}^*(q, 0) e^{-q\varepsilon} d\varepsilon \right] = x_{\text{ВХ}}^*(q, 0) \int_0^{\gamma} e^{-q\varepsilon} d\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{ВХ}}[n] e^{-qn} \frac{1 - e^{q\gamma}}{q}. \quad (7.170)$$

Подставив (7.170) в (7.169), получим:

$$\begin{aligned} x_{\text{ВЫХII}}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{ВХ}}(n) \cdot \frac{1 - e^{-q\gamma}}{q} W(q) e^{-qn} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{ВХ}}(n) \cdot \left[ \frac{W(q)}{q} - \frac{W(q)}{q} e^{-q\gamma} \right] e^{-qn}. \end{aligned} \quad (7.171)$$

Так как  $L^{-1} \left[ \frac{W(q)}{q} \right] = h_{\Lambda}[t]$  — переходная функция непрерывной части системы, то

$$L^{-1} \left[ \frac{K(q)}{q} e^{-q\gamma} \right] = h_{\Lambda}[t - \gamma T].$$

Переходя в (7.171) к оригиналам, получим:

$$x_{\text{ВЫХII}}(t) = \sum_{n=0}^m x_{\text{ВХ}}[n] \{ h_{\Lambda}[t - nT] - h_{\Lambda}[t - nt - \gamma T] \},$$

где  $\frac{t}{T} = m + \varepsilon, m = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

После подстановки в это выражение относительного времени  $t = (m + \varepsilon)$  имеем:

$$x_{\text{ВЫХII}}[m, \varepsilon] = \begin{cases} \sum_{n=0}^m x_{\text{ВХ}}[n] \{ h_{\Lambda}[(m-n+\varepsilon)T] - \\ - h_{\Lambda}[(m-n-1)+(1+\varepsilon-\gamma)T] \} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \gamma; \\ \sum_{n=0}^m x_{\text{ВХ}}[n] \{ h_{\Lambda}[(m-n+\varepsilon)T] - \\ - h_{\Lambda}[(m-n+\varepsilon-\gamma)T] \} & \text{при } \gamma \leq \varepsilon < 1, \end{cases}$$

что совпадает с точностью до обозначений с выражением  $x_{\text{ВЫХI}}$  для разомкнутых импульсных систем с АИМ I рода и прямоугольными импульсами (см. выражение 7.15).

### 7.9. Функциональная схема и математическая модель цифровой системы управления с обратной связью

Функциональная схема типичной цифровой системы управления приведена на рис. 7.22. Сигнал на выходе аналогового объекта управления преобразуется измерительным устройством ИУ в нормированный сигнал  $y_3$ , который, в свою очередь, поступает на вход АЦП.

Дискретизированный по времени и квантованный по уровню сигнал  $y_4$  с выхода АЦП в цифровой форме поступает на второй вход

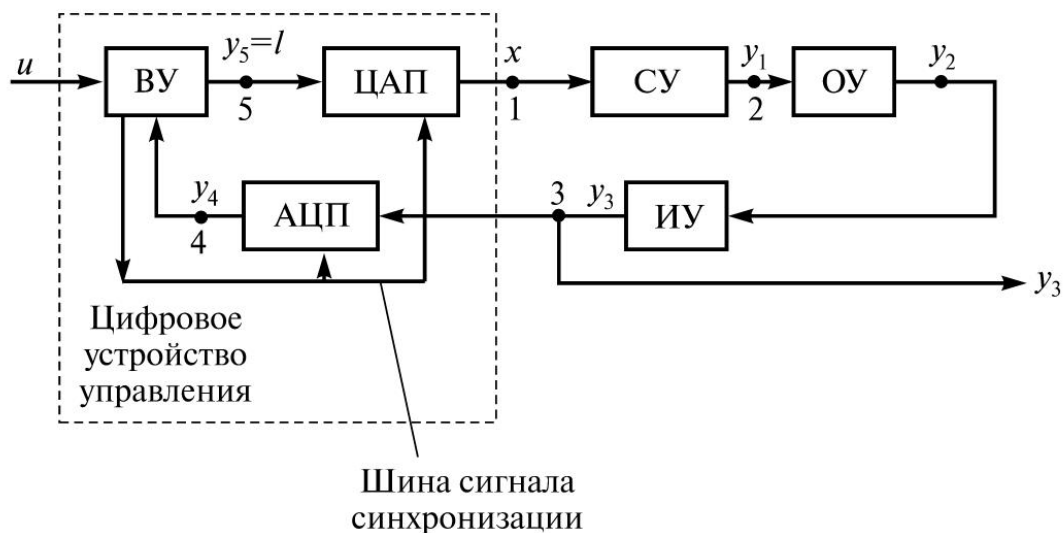


Рис. 7.22. Функциональная схема замкнутой цифровой системы

вычислительного устройства ВУ. На первый вход ВУ поступает сигнал управления  $u$ . Входной сигнал  $u$  постоянен в системах стабилизации, изменяется по заданному закону  $u(t)$  в системах программного управления, является случайной функцией в следящих системах. Вычислительное устройство определяет разность сигналов  $u[nT]$  и  $y_4[nT]$ , т.е.  $\Delta[nT] = u[nT] - y_4[nT]$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $T$  — шаг временной дискретизации, и в соответствии с заданным законом управления преобразует рассогласование  $\Delta[nT]$  в управляющий сигнал  $l[nT]$ , т.е.

$$l[nT] = L\{\Delta[nT]\}, \quad (7.172)$$

где  $L$  — оператор преобразования.

Так как сигнал  $l[nT]$  на выходе вычислительного устройства получен в цифровой форме, а объект управляется аналоговым сигналом, то  $l[nT]$  преобразуется из цифровой в аналоговую форму цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП). Для согласования по мощности к выходу ЦАП подключается согласующее устройство (СУ), выходной сигнал с которого поступает на вход объекта управления. АЦП, ЦАП, ВУ обычно конструктивно реализуются в одном блоке, называемом цифровым устройством управления. Синхронизация работы АЦП, ЦАП, ВУ осуществляется генератором вычислительного устройства с тактом  $T$ .

Согласующее устройство, объект управления ОУ, измерительное устройство ИУ являются непрерывными инерционными объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями (напомним, что в этой книге рассматриваются системы, моделью которой являются только обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных не рассматриваются). Вычислительное устройство моделируется разностными уравнениями. Временная дискретизация сигналов, поступающих на вход объектов, которые описываются дифференциальными уравнениями, моделируется идеальным импульсным элементом, на выходе которого решетчатая функция — последовательность  $\delta$ -функций, следующих с тактом  $T$ , «веса» которых равны значениям дискретизируемой функции при  $t = nT$  (см. п. 7.2). Ранее АЦП моделировался как статическая нелинейность с зависимостью между входом и выходом (см. п. 3.2). При таком подходе преобразование «аналог—цифра» происходит мгновенно. Реальные АЦП имеют конечное время преобразования. В работе [7] показано, что цифровой экви-

валент в момент времени  $t = nT$ , если пренебречь погрешностью квантования по уровню, пропорционален среднему значению преобразуемого сигнала за некоторый промежуток времени  $t_{об}$ , который находится между моментами  $t = (n - 1)T$  и  $t = nT$ . Далее в соответствии с функциональной схемой сигнал на входе АЦП будем обозначать  $y_3$ , на выходе —  $y_4$ .

Для АЦП «напряжение—цифра» с устройством выборки и хранения (УВХ)

$$y_4[nT] = \frac{1}{t_{об}} \int_{nT-t_{об}}^{nT} y_3(t) dt, \quad (7.173)$$

где  $t_{об}$  — время интегрирования в УВХ.

Для АЦП с промежуточным преобразованием в частоту

$$y_4[nT] = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^T y_3(t) dt. \quad (7.174)$$

Для АЦП с промежуточным преобразованием в длительность импульса с интегральной ШИМ

$$y_4[nT] = \frac{1}{t_{об}} \int_{(n-1)T}^{(n-1)T+t_{об}} y_3(t) dt. \quad (7.175)$$

В наборе рассмотренных ранее моделей отсутствует модель преобразования функции  $y(t)$  непрерывного аргумента  $t$  в функцию  $y[nT]$  дискретного аргумента  $t = nT$ . Рассматриваемый ранее импульсный элемент преобразует  $x(t)$  в решетчатую функцию. Это преобразование удобно, когда дискретизированный сигнал поступает на вход системы, описываемой дифференциальными уравнениями. Если дискретизированный сигнал поступает на вход системы, описываемой разностными уравнениями, то необходимо формально осуществить преобразование  $y(t) \rightarrow y[nT]$ . На функциональной схеме (рис. 7.23) приведен импульсный элемент (не «идеальный», опи-

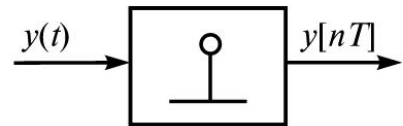


Рис. 7.23. Обозначение импульсного элемента (не «идеального»), преобразующего непрерывный сигнал  $y(t)$  в дискретный  $y[nT]$



санный ранее), на вход которого подана функция  $y(t)$  непрерывного аргумента, на выходе  $y[nT]$  — функция дискретного аргумента.

Тогда участок схемы между точками 3 и 4 (см. рис. 7.22), содержащий АЦП, моделируется в соответствии с функциональной схемой, приведенной на рис. 7.24.

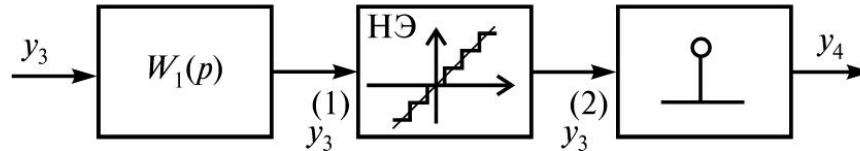


Рис. 7.24. Модель участка функциональной схемы рис. 7.22 между точками 3 и 4

Первое звено с передаточной функцией  $W_1(p)$  определяется способом построения АЦП. Для АЦП, в котором временем преобразования «аналог—цифра» можно пренебречь,  $W_1(p) = 1$ . При этом  $y_3^{(1)}(t) = y_3(t)$ . Нелинейный элемент реализует операцию квантования по уровню в соответствии с выражением (см. п. 3.2). Если погрешностью квантования по уровню можно пренебречь, то  $y_3^{(2)} = y_3^{(1)}$ . Импульсный элемент осуществляет временную дискретизацию, преобразуя  $y_3^{(2)}$  в  $y_4[nT]$ . Итак, при «мгновенном» преобразовании «аналог—цифра» и при линеаризации статистической характеристики нелинейного элемента, моделью рассматриваемого участка функциональной схемы является импульсный элемент.

Рассмотрим моделирование АЦП «напряжение—код» с устройством выборки-хранения (УВХ). Первое звено модели в соответствии с (7.173) реализует преобразование

$$y_3^{(1)} = \frac{1}{t_{\text{об}}} \int_{t-t_{\text{об}}}^t y_3(t) dt.$$

Так как  $y_3(t) = 0$  при  $t < 0$ , то

$$y_3^{(1)} = \frac{1}{t_{\text{об}}} \left[ \int_0^t y_3(t) dt - \int_0^t y_3(t-t_{\text{об}}) dt \right].$$

Применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям этого выражения, получаем:

$$y_3^{(1)}(p) = \frac{1}{t_{об}} \frac{y_3(p)(1 - e^{-pt_{об}})}{p}.$$

Откуда

$$W_1(p) = \frac{y_3^{(1)}(p)}{y_3(p)} = \frac{1}{t_{об}} \frac{(1 - e^{-pt_{об}})}{p}. \quad (7.176)$$

Следующие два звена модели остаются неизменными.

Для аналого-цифрового преобразователя с промежуточным преобразованием в частоту в соответствии с выражением (7.174)

$$y_3^{(1)} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t y_3(t) dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^t y_3(t) dt - \int_0^t y_3(t-T) dt \right].$$

Откуда

$$y_3^{(1)}(p) = \frac{1}{pT} y_3(p) - \frac{1}{pT} y_3(p) e^{-pT},$$

и

$$W_1(p) = \frac{y_3^{(1)}(p)}{y_3(p)} = \frac{1}{T} \frac{(1 - e^{-pT})}{p}. \quad (7.177)$$

Для АЦП с интегральной широтно-импульсной модуляцией в соответствии с выражением (7.175)

$$y_3^{(1)} = \frac{1}{t_{об}} \int_{t-T}^{t-T+t_{об}} y_3(t) dt = \frac{1}{t_{об}} \left[ \int_0^t y_3(t-T+t_{об}) dt - \int_0^t y_3(t-T) dt \right].$$

Откуда

$$y_3^{(1)}(p) = \frac{1}{t_{об}} \left[ \frac{y_3(p) e^{-p(T-t_{об})}}{p} - \frac{y_3(p) e^{-pT}}{p} \right],$$

и

$$W_1(p) = \frac{y_3^{(1)}(p)}{y_3(p)} = \frac{1}{t_{об}} \frac{e^{-p(T-t_{об})} - e^{-pT}}{p}. \quad (7.178)$$

Если пренебречь погрешностью квантования по уровню, то модель преобразования  $y_3(t)$  в  $y_4(t)$  состоит из линейного звена с передаточной функцией  $W_1(p)$  и импульсного элемента. Второе звено становится усилителем с коэффициентом усиления равным 1. Его можно не изображать на структурной схеме.

Осталось рассмотреть модель части функциональной схемы между точками 5 и 1 рис. 7.22, т.е. описать преобразование сигнала  $l[nT]$  на выходе вычислительного устройства в сигнал  $x(t)$  на входе согласующего устройства. В момент времени  $t = nT$  результат вычислений, выполненных в ВУ, записывается в память и хранится там до момента времени  $t = n + 1$ . Следовательно, кодовый сигнал  $l[nT]$  не изменяется в течении такта  $T$ . ЦАП преобразует код результата вычислений в напряжение. В соответствии с приведенным описанием, процессу преобразования соответствует временная диаграмма, приведенная на рис. 7.25. Здесь жирными точками отмечены значения

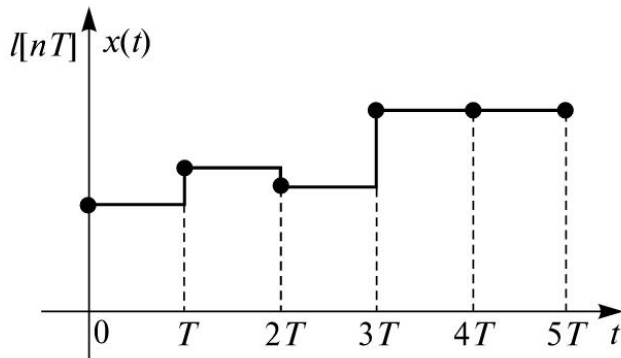


Рис. 7.25. Преобразование цифрового сигнала  $l[nT]$  в аналоговый  $x(t)$

$l[nT]$ , линиями — сигнал  $x(t)$  на выходе ЦАП. Разомкнутая импульсная система, приведенная на рис. 7.26, моделирует это преобразование. Идеальный импульсный элемент преобразует в момент времени  $t = nT$  сигнал  $l[nT]$  в сигнал  $l[nT]\delta(t - nT)$ .

Приведенная непрерывная часть, передаточная функция которой

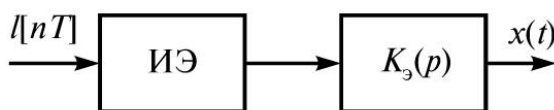


Рис. 7.26. Модель преобразования цифрового сигнала в аналоговый

$$W_3(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT},$$

имеет импульсную переходную функцию

$$k_3(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} \right\} = 1(t) - 1(t - T),$$

что описывает прямоугольный импульс длительностью  $T$  и амплитудой равной 1. На вход непрерывной части в момент времени  $t = nT$  поступает  $\delta$ -функция с весом  $I[nT]$ . Следовательно, при  $t = nT$  на выходе непрерывной части формируется прямоугольный импульс с амплитудой  $I[nT]$ . Последовательность таких импульсов является сигналом  $x(t)$ , приведенным на рис. 7.26.

Такой способ восстановления непрерывного сигнала из дискретизированного называется *экстраполяцией нулевого порядка*. Действительно, при известном значении сигнала в момент  $t = nT$  экстраполируется его значение до момента  $(n + 1)T$ . При этом считается, что сигнал не изменяется в промежутке от  $t = nT$  до  $t = (n + 1)T$ . Вычислительное устройство совместно с цифро-аналоговым преобразователем может реализовывать также восстановление *экстраполятором первого порядка*. Процедура экстраполяции первого порядка иллюстрируется на рис. 7.27. Здесь жирными точками отмечены значения функции  $I[nT]$ , жирные линии определяют восстановленную функцию непрерывного аргумента. Тонкие линии показывают способ построения восстановленного сигнала.

Аналогично модели экстраполяторов нулевого порядка, приведенной на рис. 7.26, представим модель экстраполятора первого порядка разомкнутой импульсной системой и определим вид передаточной функции непрерывной части. Пусть в момент времени  $t = 0$  на вход разомкнутой импульсной системы поступает сигнал  $I[0] = 1$ .

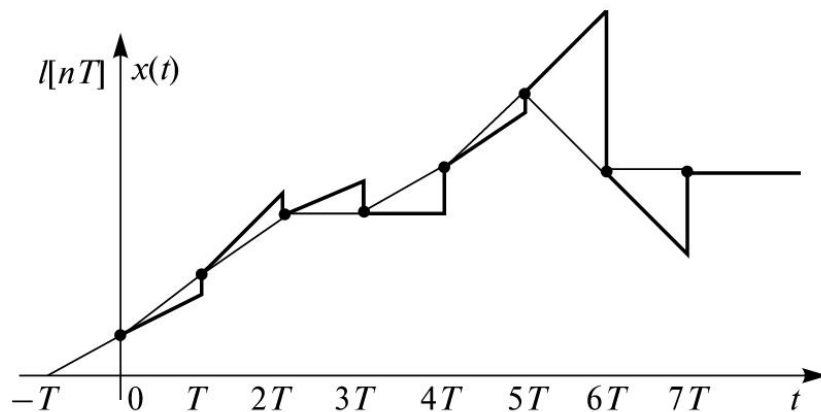


Рис. 7.27. Процедура экстраполяции первого порядка

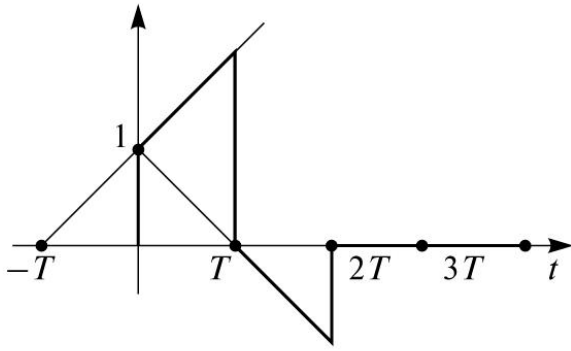


Рис. 7.28. Способ восстановления сигнала  $l[0T] = 1, l[nT] = 0, n = 1, 2, \dots$  экстраполятором первого порядка

Тогда на выходе непрерывной части формируется ее импульсная переходная функция, вид которой должен соответствовать восстановлению функции  $l[0T] = 1; l[nT] = 0$  при  $n \neq 0$  экстраполятором первого порядка. Способ восстановления и результат приведены на рис. 7.28.

В соответствии с этим рисунком импульсная переходная функция непрерывной части имеет вид:

$$k_{\Sigma}(t) = \frac{t}{T} - 2\frac{t-T}{T} + \frac{t-2T}{T} + l(t) - 2 \cdot l(t-T) + l(t-2T), \quad (7.179)$$

где второе и пятое слагаемые равны 0 при  $t < T$ , третье и шестое слагаемые равны 0 при  $t < 2T$ .

Передаточную функцию экстраполятора первого порядка получим, применив преобразования Лапласа к правой части (7.179). При этом

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{1}{T} \frac{(1 - e^{-pT})^2}{p^2} + \frac{(1 - e^{-pT})^2}{p}. \quad (7.180)$$

В общем случае можно рассматривать экстраполяцию  $M$ -го порядка, которая на интервале от  $MT$  до  $(M+1)T$  описывает изменение сигнала многочленом  $M$ -й степени. Коэффициенты этого многочлена вычисляют по известным значениям  $l[n-M], l[n-M+1], \dots, l[n]$ . Сигнал  $x[n, \epsilon]$  на выходе экстраполятора  $M$ -го порядка, как показано в [7], определяется выражением

$$x[n, \epsilon] = \sum_{i=0}^M L_i^{\Sigma}[0, \epsilon] l[n-M+i], \quad (7.181)$$

где

$$L_i^{\Sigma}[0, \epsilon] = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \frac{M-j+\epsilon}{i-j}.$$

Передаточная функция  $W_{\varepsilon}(p)$  непрерывной части импульсной системы, являющейся моделью восстановления при использовании экстраполятора  $M$ -го порядка, имеет вид:

$$W_{\varepsilon}(p) = \sum_{i=0}^M L_i^{\varepsilon}(p) e^{-pT\varepsilon}, \quad (7.182)$$

где

$$L_i^{\varepsilon}(p) = T \int_0^1 L_i^{\varepsilon}[0, \varepsilon] e^{-pT\varepsilon} d\varepsilon. \quad (7.183)$$

Восстановление непрерывного сигнала из дискретного может быть реализовано на основе различных способов аппроксимации функции дискретного аргумента  $\lfloor nT \rfloor$ .

Итак, функционирование типичной системы автоматического управления, схема которой приведена на рис. 7.22, может быть описано на базе известных моделей, составляющих полную систему соотношений для вычислений значений сигналов в фиксированный момент времени в заданной точке функциональной схемы.

В том случае, если модели объекта управления, согласующего и измерительного устройства, аналого-цифрового преобразователя линеаризованы, а вычислительное устройство реализует закон управления, описываемый линейным разностным уравнением, модель цифровой системы управления становится линейной. Структурная схема модели приведена на рис. 7.29.

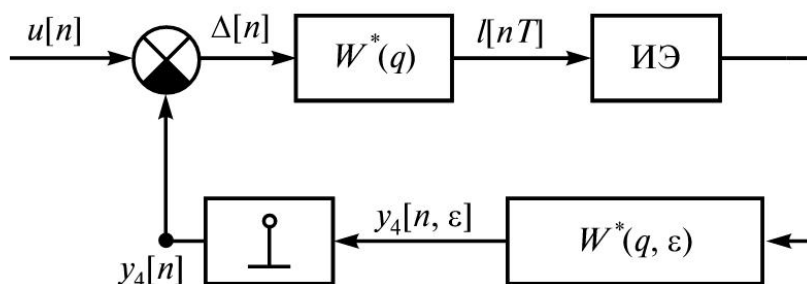


Рис. 7.29. Структурная схема модели замкнутой импульсной системы

Передаточная функция  $W(p)$  в смысле обычного преобразования Лапласа равна произведению следующих передаточных функций:

$$W(p) = W_3(p)W_{cy}(p)W_{об}(p)W_{иу}(p)W_1(p),$$

где множители являются передаточными функциями соответственно непрерывной части модели: экстраполятора, согласующего устройства, объекта управления, измерительного устройства, первого звена модели АЦП.

Тогда импульсная переходная характеристика этой части системы имеет вид:

$$k(t) = L^{-1}[W(p)]. \quad (7.184)$$

Передаточная функция этой же части системы в смысле  $D$ -преобразования имеет вид:

$$W^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} k[n, \varepsilon] e^{-qn}, \quad (7.185)$$

где  $k[n, \varepsilon]$  получаем из (7.184) после перехода к относительному времени  $t/T = n + \varepsilon$ . Передаточная функция вычислительного устройства обозначена как  $W^*(q)$ .

Изображение сигнала  $y_4[n]$  в соответствии со структурной схемой, приведенной на рис. 7.29, определяется выражением

$$y_4^*(q) = [u^*(q) - y_4^*(q)] W^*(q) W^*(q, \varepsilon = 0).$$

Откуда

$$y_4^*(q) = \frac{W^*(q) W^*(q, \varepsilon = 0)}{1 + W^*(q) W^*(q, \varepsilon = 0)} u^*(q),$$

где

$$W_c^*(q) = \frac{W^*(q) W^*(q, \varepsilon = 0)}{1 + W^*(q) W^*(q, \varepsilon = 0)} \quad (7.186)$$

передаточная функция замкнутой системы.

Если необходимо получить изображение сигнала  $y_4[n, \varepsilon]$ , то

$$y_4^*(q, \varepsilon) = W_c^*(q, \varepsilon) u^*(q), \quad (7.187)$$

где

$$W_c^*(q, \varepsilon) = \frac{W^*(q)W^*(q, \varepsilon)}{1 + W^*(q)W^*(q, \varepsilon)}. \quad (7.188)$$

Изображение сигнала рассогласования  $\Delta[n] = u[n] - y_4[n]$  определяется из следующего уравнения, соответствующего структурной схеме:

$$\Delta^*(q) = u^*(q) - \Delta^*(q)W^*(q)W^*(q, \varepsilon = 0).$$

Откуда

$$\Delta^*(q) = \frac{1}{1 + W^*(q)W^*(q, \varepsilon = 0)} u^*(q), \quad (7.189)$$

где

$$W_\Delta^*(q) = \frac{1}{1 + W^*(q)W^*(q, \varepsilon = 0)} \quad (7.190)$$

передаточная функция замкнутой цифровой системы по ошибке.

Из (7.189) следует, что

$$\Delta[n] = D^{-1} \{ W_\Delta^*(q) u^*(q) \}. \quad (7.191)$$

### Пример 7.11

Функциональная схема системы управления приведена на рис. 7.22. Объект управления задан линейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T_{об} \frac{dy_2}{dt} + y_2 = k_{об} y_1. \quad (7.192)$$

Чувствительный элемент практически безынерционен, его коэффициент усиления равен  $k_{чэ}$ .

Аналого-цифровой преобразователь 8-разрядный, быстродействующий. Временем преобразования «аналог—цифра» можно пренебречь. Погрешностью квантования по уровню также можно пренебречь.

Вычислительное устройство реализует закон управления, аналогичный пропорционально-интегральному в непрерывных системах. Если  $\Delta[n] = u[n] - y_4[n]$ , где  $u[n]$  — входной сигнал,  $y_4[n]$  — сигнал на выходе АЦП, то сигнал на выходе вычислительного устройства имеет вид:



$$y_5[n] = k_1 \Delta[n] + k_2 \sum_{m=0}^{n-1} \Delta[m]. \quad (7.193)$$

Результат вычисления  $y_5[n]$  в начале каждого такта записывается в регистр памяти, к которому подключен цифро-аналоговый преобразователь. Из этого условия следует, что в системе используется экстраполяция нулевого порядка. Передаточная функция экстраполятора нулевого порядка

$$W_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT}, \quad (7.194)$$

где  $T$  — такт работы вычислительного устройства.

Согласующее устройство — транзисторный усилитель, инерционностью которого можно пренебречь. Коэффициент усиления согласующего устройства равен  $k_{cy}$ .

Требуется найти  $W_{\Delta}^*(q)$  — передаточную функцию замкнутой импульсной системы по ошибке.

Вначале определим передаточную функцию в смысле обычного преобразования Лапласа непрерывной части системы.

Преобразуя по Лапласу левую и правую части уравнения (7.192), получаем:

$$T_{об} p y_2 + y_2(p) = k_{об} y_1(p).$$

Откуда передаточная функция объекта управления

$$W_{об}(p) = \frac{y_2(p)}{y_1(p)} = \frac{k_{об}}{T_{об} p + 1}.$$

Передаточная функция непрерывной части системы с учетом заданных условий имеет вид:

$$W(p) = \frac{k_{об}}{T_{об} p + 1} k_{чз} k_{cy} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} \right).$$

Импульсная переходная функция непрерывной части

$$k(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1} \left[ \frac{k}{T_{об} p + 1} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} \right) \right],$$

где  $k = k_{об} k_{cy} k_{чз}$ .

Оригинал изображения  $\frac{k}{p(T_{об} p + 1)}$  находим, учитывая, что корнями характеристического уравнения  $p(T_{об} p + 1) = 0$  являются  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -1/T_{об}$ .

Тогда

$$L^{-1}\left[\frac{k}{p(T_{\Phi}p+1)}\right]=k\left[1(t)-e^{\frac{t}{T_{\Phi}}}\right]. \quad (7.195)$$

Оригинал изображения  $\frac{k}{p(T_{\text{об}}p+1)}e^{-pT}$  отличается от (7.195) только запаздыванием на  $T$ .

$$L^{-1}\left[\frac{k}{p(T_{\text{об}}p+1)}e^{-pT}\right]=\left[1(t-T)-e^{\frac{-(t-T)}{T_{\text{об}}}}\right].$$

Откуда

$$k(t)=\left[1(t)-e^{\frac{-t}{T_{\text{об}}}}\right]-\left[1(t-T)-e^{\frac{t-T}{T_{\text{об}}}}\right],$$

где второе слагаемое в квадратных скобках равно 0 при  $t < T$ .

Переходя к относительному времени, получаем:

$$k[n, \varepsilon]=\left\{1[n, \varepsilon]-e^{-an}e^{-a\varepsilon}\right\}-\left\{1[n-1, \varepsilon]-e^{-a(n-1)}e^{-a\varepsilon}\right\},$$

где  $a = T/T_{\text{об}}$ .

Следовательно,

$$W^*(q, \varepsilon)=D\{k[n, \varepsilon]\}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} D\{1[n, \varepsilon]\} &= \frac{e^q}{e^q - 1}; D\{e^{-an}\} = \frac{e^q}{e^q - e^{-a}}; \\ D\{1[n-1, \varepsilon]\} &= \frac{e^q}{e^q - 1}e^{-q}; D\{e^{-a(n-1)}\} = \frac{e^q}{e^q - e^{-a}}e^{-q}, \end{aligned}$$

получаем:

$$W^*(q, \varepsilon)=k\left\{1-e^{-a\varepsilon}\frac{e^q-1}{e^q-e^{-a}}\right\}.$$

Передаточную функцию  $W^*(q)$  вычислительного устройства получаем, применив  $D$ -преобразование левой и правой части уравнения (7.193):

$$D\{y_5[n]\} = D\{k_1\Delta[n]\} + D\left\{\sum_{m=0}^{n-1} [m]\right\},$$

откуда

$$y_5^*(q) = k_1\Delta^*(q) + k_2 \frac{\Delta^*(q)}{e^q - 1}.$$

Здесь использована теорема об изображении суммы (см. выражение 7.110). Тогда

$$W^*(q) = \frac{y_5^*(q)}{\Delta^*(q)} = k_1 + k_2 \frac{1}{e^q - 1}.$$

Передаточная функция замкнутой системы в соответствии с (7.190) имеет вид:

$$W_{\Delta}^*(q) = \frac{1}{1 + k \left\{ 1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-a}} \right\} \left\{ k_1 + k_2 \frac{1}{e^q - 1} \right\}}.$$

Обозначив  $e^q = z$ , переходим к  $Z$ -преобразованию. После несложных преобразований получаем:

$$W_{\Delta}^*(z) = \frac{(z-b)(z-1)}{z^2 + [kk_1(1-b) - 1 - b]z + k(k_2 - k_1)(1-b) + b},$$

где  $b = e^{-a}$ .

## 7.10. Устойчивость линейных импульсных систем

Физически понятие устойчивости линейных импульсных систем можно ввести так же, как понятие устойчивости непрерывных линейных систем. Импульсная линейная система устойчива, если после подачи на ее вход кратковременного сигнала, она с течением времени приходит в исходное состояние. Эквивалентно этому определению можно ввести понятие устойчивости линейной импульсной системы следующим образом: если рассматриваемая система с ненулевыми начальными условиями при отсутствии входного сигнала с течением времени приходит в состояние покоя, то такая система устойчива.

Пусть  $y_{\text{ВЫХ}}^*[n, \varepsilon]$  — сигнал на входе линейной импульсной системы. При заданном входном сигнале  $x_{\text{ВХ}}[nT]$  изображение сигнала на выходе системы имеет вид:

$$y_{\text{ВЫХ}}^*(q, \varepsilon) = W^*(q, \varepsilon) x_{\text{ВХ}}^*(q), \quad (7.196)$$

где  $W^*(q, \varepsilon)$  для разомкнутых систем определяется выражением (7.161); для замкнутых импульсных систем в зависимости от того, в какой точке системы рассматривается сигнал  $y_{\text{ВЫХ}}(t)$ , передаточная функция  $W^*(q, \varepsilon)$  определяется либо как  $W^*(q, \varepsilon) = W_{\text{с}}^*(q, \varepsilon)$  в соответствии с (7.188), либо как  $W^*(q, \varepsilon) = W_{\Delta}^*(q)$  в соответствии с (7.190). Обычно  $W^*(q, \varepsilon)$  является дробно-рациональной функцией  $e^q$ . При этом степень многочлена числителя не превышает степень многочлена знаменателя.

Пусть

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{H^*(q, \varepsilon)}{G^*(q, \varepsilon)},$$

где  $H^*(q, \varepsilon) = a_0(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)e^q + a_2(\varepsilon)e^{2q} + \dots + a_l(\varepsilon)e^{lq}$ ;  
 $G^*(q, \varepsilon) = b_0(\varepsilon) + b_1(\varepsilon)e^q + b_2(\varepsilon)e^{2q} + \dots + b_r(\varepsilon)e^{rq}$ ;  
 $l \leq r$ .

Введем обозначения  $e^q = z$ . Тогда

$$W^*(z, \varepsilon) = \frac{H^*(z, \varepsilon)}{G^*(z, \varepsilon)}.$$

Приравняв к нулю знаменатель этого выражения, получаем характеристическое уравнение системы:

$$G^*(z, \varepsilon) = 0.$$

При каждой фиксированной величине  $\varepsilon (0 \leq \varepsilon \leq 1)$  это уравнение имеет  $r$  корней, среди которых могут быть кратные.

Зададимся далее кратковременным входным сигналом:

$$x_{\text{ВХ}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

В относительном времени

$$x_{\text{ВХ}}[nT] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ 0 & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

тогда

$$x_{\text{BX}}^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{BX}}[nT]e^{-qn} = 1.$$

При таком входном сигнале изображение сигнала на выходе системы в соответствии с (7.196) имеет вид:

$$y_{\text{ВЫХ}}^*(q) = W^*(q, \varepsilon).$$

Оригинал сигнала на выходе системы

$$y_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = D^{-1} \{W^*(q, \varepsilon)\}.$$

В общем случае при наличии кратных корней характеристического уравнения, рассматривая  $\varepsilon$  как параметр, сигнал на выходе системы определяется выражением (7.140), в соответствии с которым

$$y_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = \sum_{v=1}^S \sum_{\mu=0}^{r_v-1} c_{\mu v} z_v^{n-\mu} \frac{n^{(\mu)}}{\mu!}. \quad (7.197)$$

При отсутствии кратных корней сигнал на выходе системы определяется выражением (7.137), в соответствии с которым

$$y_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0 \\ \sum_{v=1}^r \frac{H^*(z_v, \varepsilon)}{G^*(z_v, \varepsilon)} z_v^{n-1} & \end{cases}, \quad (7.198)$$

где  $z_v$  — корни характеристического уравнения системы.

Из выражений (7.197) и (7.198) можно сделать следующие выводы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\text{ВЫХ}}[n, \varepsilon] = 0, \text{ если } |z_v| < 1, \quad v = 1, 2, \dots, r, \text{ т.е. система устойчи-}$$

ва, когда модули всех корней ее характеристического уравнения меньше 1. Так как корни уравнения в общем случае комплексные, то можно изменить формулировку: *импульсная линейная система устойчива, когда корни ее характеристического уравнения находятся внутри круга с радиусом, равном единице, расположенного в плоскости  $z$*

(см. рис. 7.30); если хотя бы один корень расположен на границе круга, т.е. его модуль равен 1, то *система находится на границе устойчивости*. В этом случае говорят, что *система нейтральна*. Если хотя бы один корень характеристического уравнения расположен вне единичного круга, то система *неустойчива*.

Условия устойчивости линейной импульсной системы можно получить относительно комплексных переменных  $q_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, s$ . Выше было введено обозначение  $z = e^q$ . Следовательно,

$$z_v = e^{q_v}.$$

Пусть  $q_v = a_v + jb_v$ . Тогда  $z_v = e^{a_v} e^{jb_v}$ . Откуда  $|z_v| < 1$ , если  $a_v < 0$ . Таким образом, линейная импульсная система устойчива, когда  $q_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, s$  лежат в левой полуплоскости (рис. 7.31). Функция  $e^{q_v}$  является периодической с периодом равным  $2\pi$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} e^{q_v} &= e^{a_v} e^{jb_v} = e^{a_v} [\cos b_v + j \sin b_v] = \\ &= e^{a_v} [\cos(b_v + 2\pi k) + j \sin(b_v + 2\pi k)] = e^{a_v + 2\pi kj}. \end{aligned}$$

Поэтому значения этой функции можно рассматривать при изменении ее аргумента в полосе  $\pm j\pi$ . На рис. 7.31 показано положение двух комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения  $q_1$  и  $q_2$  и одного действительного корня  $q_3$ , лежащих в левой полуплоскости. Соответствующая линейная импульсная система третьего порядка с такими корнями устойчива.

Если хотя бы один из корней  $q_v$  лежит в правой полуплоскости, то система неустойчива. В том случае, когда  $q_v$  лежит на мнимой оси, система нейтральна.

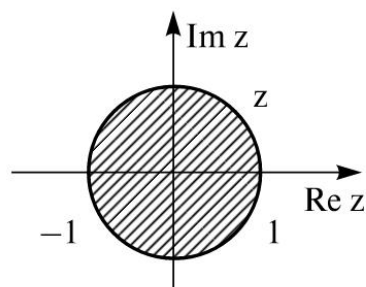


Рис. 7.30. Круг единичного радиуса на комплексной плоскости  $z$

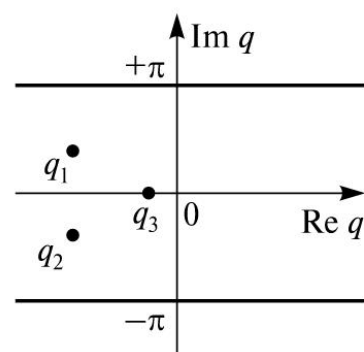


Рис. 7.31. Расположение корней характеристического уравнения устойчивой импульсной системы на комплексной плоскости  $q$

Определение корней характеристического уравнения степени 3 или 4 достаточно трудоемкая операция. Если степень многочлена более 4, его корни не выражаются через коэффициенты уравнения. Поэтому необходимо решать задачу анализа устойчивости систем, не находя корней характеристического уравнения. Для ответа на вопрос об устойчивости системы без вычисления корней характеристического уравнения служат критерии устойчивости. Рассмотрению этих критериев посвящен отдельный раздел теории автоматического управления.

---

## Глава 8. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

### 8.1. Основные определения. Статическая и динамическая нелинейности

Систему называют нелинейной, если ее модель не описывается линейным оператором. Модель нелинейной системы управления обычно представляют системой нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений. Система остается нелинейной даже тогда, когда все, кроме одного дифференциального или алгебраического уравнения, линейны. В этом случае говорят о линейной и нелинейной частях нелинейной системы. Отдельные элементы систем управления будем в дальнейшем называть звеньями. Если работа звена описывается нелинейным алгебраическим уравнением, будем говорить о статической нелинейности и, соответственно, о статическом нелинейном звене. Если работа звена описывается нелинейным дифференциальным уравнением, то говорят о динамической нелинейности и, соответственно, о нелинейном динамическом звене. Модель системы управления получают путем математического описания ее звеньев на основе законов физики и согласования входов и выходов этих звеньев в соответствии со структурной схемой системы. Если модель системы составляют  $m$  линейных дифференциальных уравнений и одно нелинейное алгебраическое уравнение, то говорят о системе с одной статической нелинейностью. В общем случае число статических нелинейностей может быть равно 2 и более. Алгебраическое уравнение  $y = f(x)$ , связывающее сигнал  $y$  на выходе звена с сигналом  $x$  на его входе в установившемся режиме, называется *статической характеристикой звена*. Для статических нелинейностей нелинейная функция  $y = f(x)$  определяет преобразование сигнала звеном. По виду этой функции статические нелинейные характеристики подразделяют на характеристики пропорционального действия, кусочно-линейные, однозначные разрывные и неоднозначные.



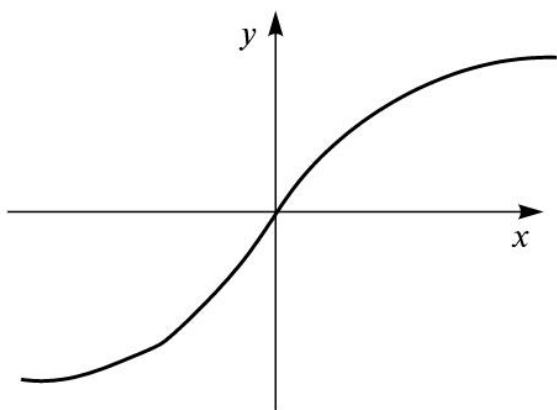


Рис. 8.1. График нелинейной статической характеристики пропорционального действия

**Звенья с характеристиками пропорционального действия.** У этих звеньев функция  $f(x)$  однозначна, непрерывна и дифференцируема во всем диапазоне изменения входного сигнала (рис. 8.1). Такой вид имеют, например, электромагнитные и электромеханические характеристики тяговых электродвигателей.

**Звенья с кусочно-линейной статической характеристикой.** Статическая характеристика звена является кусочно-линейной, если в некоторых точках производная  $\frac{dy}{dx}$

имеет разрыв (рис. 8.2).

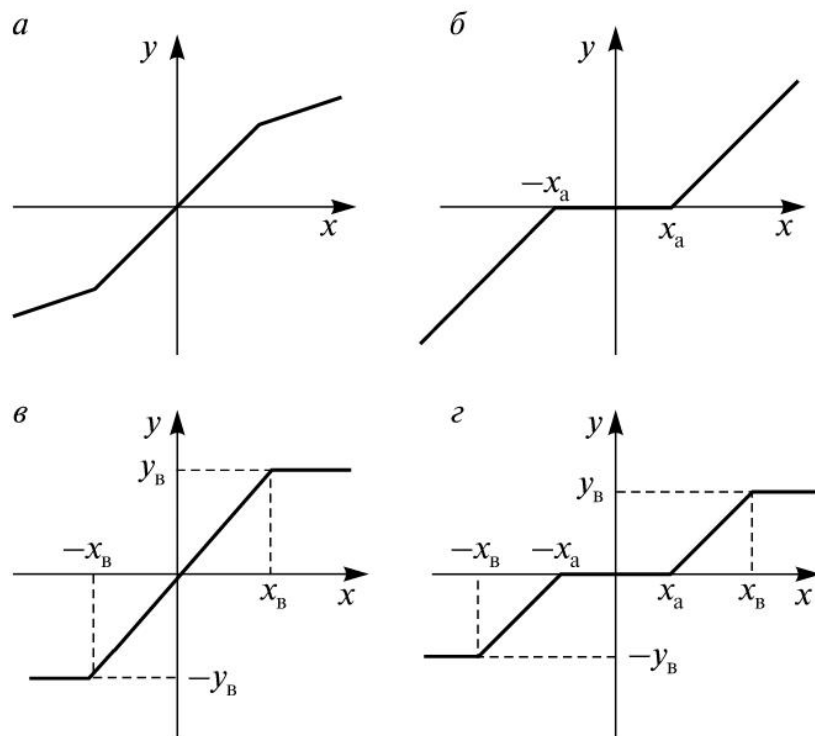


Рис. 8.2. Ломаные статические характеристики

Статическое звено, имеющее характеристику, приведенную на рис. 8.2, б, называют *звеном с зоной нечувствительности*.

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq x_a; \\ k(x - x_a) & \text{при } x > x_a; \\ k(x + x_a) & \text{при } x < -x_a. \end{cases}$$

*Звено типа ограничение* имеет статическую характеристику (см. рис. 8.2, в):

$$y = \begin{cases} kx & \text{при } |x| \leq x_B; \\ y_B \operatorname{sign} x & \text{при } |x| > x_B. \end{cases}$$

*Звено типа ограничение с зоной нечувствительности* имеет характеристику (см. рис. 8.2, г):

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq x_a; \\ k(x - x_a) & \text{при } x_B > x > x_a; \\ k(x + x_a) & \text{при } -x_B < x < -x_a; \\ y_B \operatorname{sign} x & \text{при } |x| > x_B. \end{cases}$$

**Звенья с однозначными разрывными характеристиками.** Некоторые характеристики таких нелинейных звеньев приведены на рис. 8.3.

Статическую характеристику *идеального двухпозиционного реле без гистерезиса* (см. рис. 8.3, а) можно описать выражением вида:

$$y = \begin{cases} y_B \operatorname{sign} x & \text{при } |x| > 0; \\ -y_B < y < y_B & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

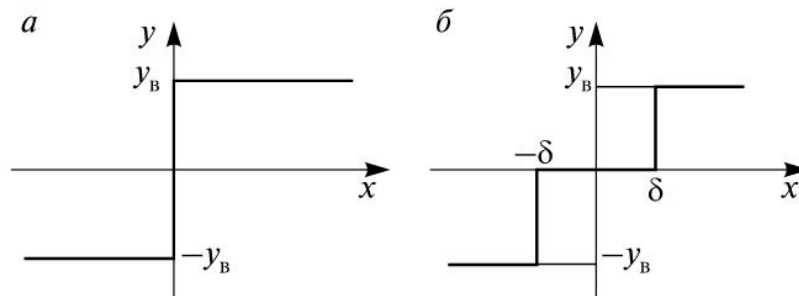


Рис. 8.3. Статические характеристики идеальных реле без гистерезиса:  
а — двухпозиционного; б — трехпозиционного

Выражение для статической характеристики звена типа *идеальное трехпозиционное реле без гистерезиса* (см. рис. 8.3, б) имеет следующий вид:

$$y = \begin{cases} y_B \operatorname{sign} x & \text{при } x \geq \delta; \\ 0 & \text{при } -\delta < x < \delta. \end{cases}$$

**Звенья с неоднозначными разрывными характеристиками.** Неоднозначность функции  $y = f(x)$  определяет свой класс статических нелинейностей. К звеньям с двухзначными характеристиками относится звено типа *двухпозиционное реле с гистерезисом*. Его характеристика приведена на рис. 8.4, а.

Величина  $y$  при  $-x_a < x < x_a$  имеет два значения  $+y_B$  или  $-y_B$  в зависимости от предыдущих значений  $x$ . Условия перехода от значения  $-y_B$  к  $+y_B$  записывается следующим образом:  $x = x_a$ ;  $y = -y_B$ ;  $\frac{dy}{dx} > 0$ . Условия перехода от значения  $+y_B$  к  $-y_B$  имеет вид:  $x = -x_a$ ;  $y = y_B$ ;  $\frac{dy}{dx} < 0$ . Таким образом,

$$y = \begin{cases} y_B & \text{при } x > x_a \text{ и } \frac{dy}{dx} > 0; \\ -y_B & \text{при } x < -x_a \text{ и } \frac{dy}{dx} < 0. \end{cases}$$

Звено типа *трехпозиционное реле с гистерезисом* имеет статическую характеристику, приведенную на рис. 8.4, б. Условия перехода от

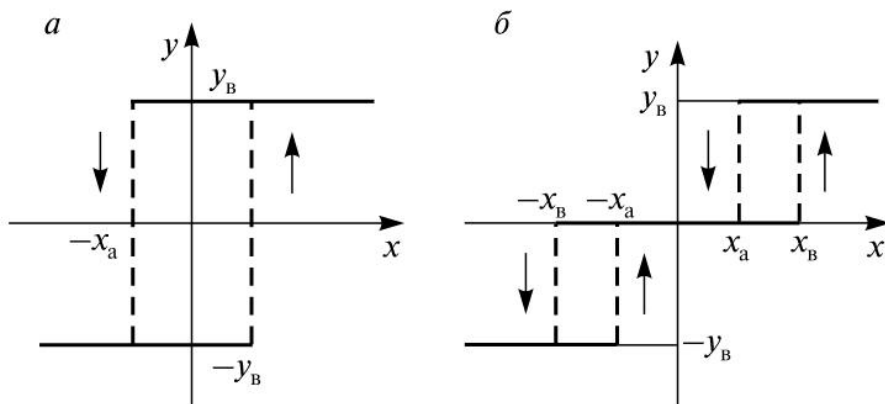


Рис. 8.4. Статическая характеристика поляризованных реле с гистерезисом: а — двухпозиционного; б — трехпозиционного

$y = 0$  к  $y = y_B$  для этого звена записывают следующим образом:  $x = x_B$ ;  
 $y = 0$ ;  $\frac{dy}{dx} > 0$ . Аналогично записывают условия остальных переходов:

$$y = \begin{cases} y_B & \text{при } x > x_B \text{ и } \frac{dy}{dx} > 0; \\ 0 & \text{при } -x_B < x < x_a \text{ и } \frac{dy}{dx} < 0; \\ -y_B & \text{при } x < -x_B \text{ и } \frac{dy}{dx} < 0; \\ 0 & \text{при } x < x_a \text{ и } \frac{dy}{dx} > 0. \end{cases}$$

К таким звеньям относится и звено типа *люфт*. Эта нелинейность наиболее часто встречается в механических системах. Она связана с наличием зазоров в зубчатых передачах. Статическая характеристика этого звена приведена на рис. 8.5.

Аналитически эта характеристика записывается так:

$$y = \begin{cases} k(x - x_a) & \text{при } \frac{dy}{dx} > 0; \\ k(x + x_a) & \text{при } \frac{dy}{dx} < 0; \end{cases}$$

$$y = -kx_a \operatorname{sign} \frac{dy}{dx} + kx \quad \text{при} \\ k(x - x_a) \leq y \leq k(x + x_a), \quad \text{когда} \\ \frac{dy}{dx} = 0.$$

Характеристики некоторых других звеньев такого типа, описывающие процессы в различных устройствах систем управления, приведены на рис. 8.6: *люфт и ограничение (а)*; *люфт*,

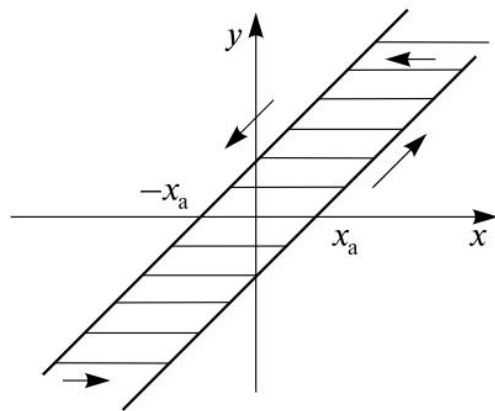


Рис. 8.5. Статическая характеристика звена типа люфт

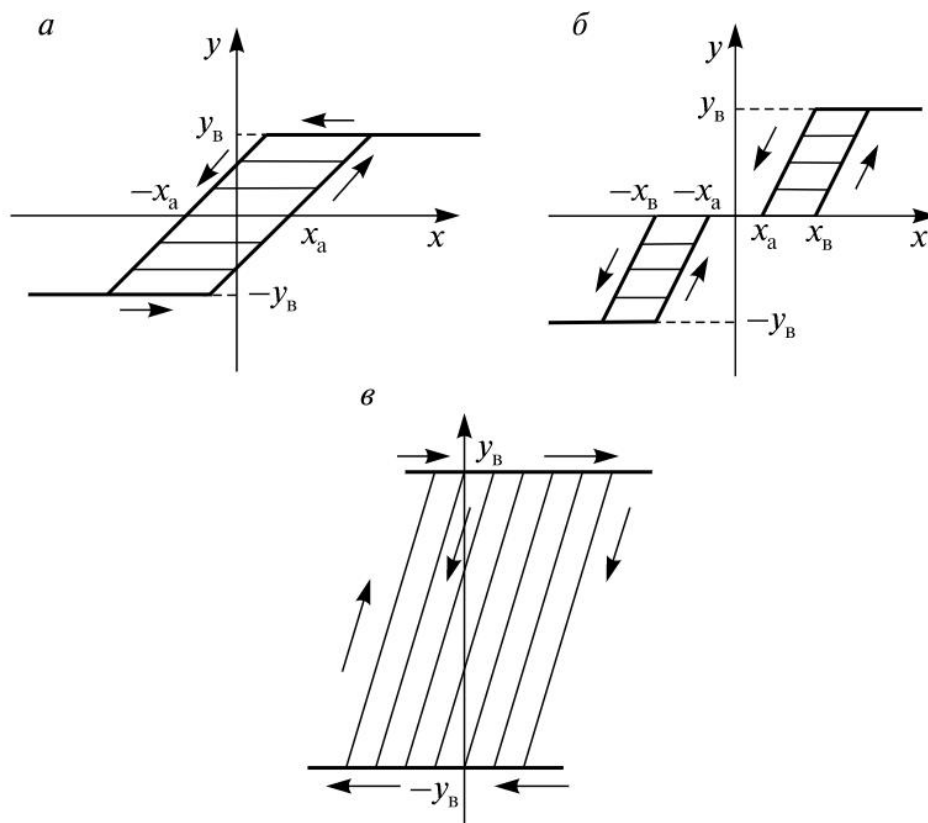


Рис. 8.6. Статические характеристики звеньев:

*а* — типа люфт и ограничение; *б* — люфт, нечувствительность и ограничение; *в* — упор

*нечувствительность и ограничение (б); упор (в)*. Так характеристики, соответствующие звену типа упор, описывают процессы в системах с пневматическими и гидравлическими усилителями, а также с электрическими серводвигателями, имеющими концевые выключатели.

*Динамические нелинейности* описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В качестве примера приведем дифференциальное уравнение движения транспортного средства:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_T \left( \frac{ds}{dt} \right) + F_c \left( \frac{ds}{dt} \right) + F_{\text{торм}} \left( \frac{ds}{dt} \right), \quad (8.1)$$

где  $m$  — масса;

$F_T$  — сила тяги;

$F_{\text{торм}}$  — торможения;

$F_c$  — сила сопротивления движению;

$s$  — пройденный путь;

$t$  — время движения.

Так как  $F_T, F_C, F_{\text{торм}}$  — нелинейные функции скорости движения  $ds/dt$ , то уравнение (8.1) нелинейное.

Допустим, что требуется вести транспортное средство с заданной скоростью. Регулятор скорости описывается линейной системой уравнений. Однако в модель системы входят уравнения объекта управления и регулятора. Учитывая, что уравнение объекта управления является нелинейным, то и модель всей системы управления также будет нелинейной.

Как уже указывалось ранее, модель системы, описываемая дифференциальным уравнением «вход—выход»  $n$ -го порядка может быть представлена моделью, состоящей из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \quad (8.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad r \leq n;$$

$$y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \quad (8.3)$$

$$j = 1, 2, \dots, m \leq n,$$

где  $x_i$  — фазовые координаты;

$u_1, u_2, \dots, u_r$  — управляющие воздействия;

$y_j$  — выходные координаты системы.

Функции  $f_i, \varphi_j$  в общем случае нелинейные. В векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u, t), \quad Y = \psi(x, u, t).$$

Если система автономна, то правые части уравнений не зависят от времени  $t$  и

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u). \quad (8.4)$$

Такую форму записи уравнений называют *нормальной формой Коши*.

Как уже указывалось при рассмотрении линейных систем, множество фазовых координат определяет фазовое пространство. Синонимом этого термина является термин «пространство состояний», используемый обычно при описании линейных моделей.

Рассматривая  $x_1, x_2, \dots, x_n$  как оси координат, состояние системы в каждый момент времени  $t$  характеризуется положением так называемой — *изображающей точки*, траектория движения которой называется фазовой траекторией. В соответствии с выражением (8.2), правые части этих уравнений определяют проекции скорости движения изображающей точки на оси координат.

При наличии двух фазовых координат (система дифференциальных уравнений второго порядка) получаем частный случай фазового пространства — фазовую плоскость. В п. 8.4 на примере системы второго порядка будет показана эффективность использования этого понятия.

## 8.2. Способы исследования нелинейных систем

В отличие от линейных систем, для нелинейных, описываемых нелинейным дифференциальным уравнением,

$$F\left(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0, \quad m \leq n, \quad (8.5)$$

где  $y$  — сигнал на выходе системы, которой невозможно найти в общем виде аналитического решения.

Для таких систем решение  $y(t) = y_{св} + y_{в}(t)$  уравнения (8.5) может быть найдено приближенными способами: либо на основе численного интегрирования этого нелинейного дифференциального уравнения, либо с применением методов линеаризации. Различным аспектам теории и практики применения численных методов посвящена обширная специальная литература.

Для численного интегрирования используют различные способы. Наиболее широкое распространение получил способ Рунге—Кутты. Для его применения необходимо вначале выполнить приведение уравнения (8.5) к нормальной форме Коши. Однако возможность выполнения такой процедуры должна быть предварительно доказана для каждого конкретного вида нелинейной зависимости (8.5), что довольно сложно выполнить.

В связи с этим для решения нелинейных дифференциальных уравнений лучше всего использовать способы интегрирования, не требующие приведения системы уравнений к форме Коши. К таким

схемам относятся, например, явная схема «предиктор» и неявные схемы —  $\beta$ -схема Ньюмарка, схема Парка и т.п. [43]. При этом следует иметь в виду, что из-за вычислительных погрешностей схемы численного интегрирования могут дать неустойчивые решения не только для нелинейных, но даже и для устойчивых линейных систем. Опыт применения различных схем численного интегрирования нелинейных уравнений динамики локомотивов показал, что лучшие результаты могут быть получены на основе выполнения численного интегрирования по вышеуказанным схемам Парка,  $\beta$ -схеме Ньюмарка и схеме «предиктор».

В последнее время вместо прямого численного интегрирования дифференциальных уравнений электромеханических систем широкое распространение получило использование пакетов прикладных программ, например, таких как *Orcad*, *Matlab* и т. п. Применение этих пакетов не требует составления систем дифференциальных уравнений. Достаточно изобразить исследуемую систему графическими средствами пакета, а составление и решение уравнений пакет будет выполнять самостоятельно. Примеры использования пакета *Matlab* для исследования систем автоматического управления э.п.с. будут приведены в следующих разделах учебника.

В ряде случаев, существенных при решении практических задач, процессы в нелинейных системах можно с достаточной степенью точности анализировать на линейных моделях. Пусть сигнал  $u(t)$  на входе системы имеет вид:

$$u(t) = u_0 + \Delta u(t),$$

где  $u_0$  — неизменная во времени составляющая;

$\Delta u(t)$  — отклонение от неизменной составляющей входного сигнала.

Математическая модель системы задана нелинейным дифференциальным уравнением (8.5). Будем считать, что функция  $F$  — непрерывна и имеет все производные  $\dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(m)}$  и  $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$ . При постоянном входном сигнале  $u_0$  система находится в установившемся режиме  $y = y_0$ , т.е.

$$F(u_0, 0, 0, \dots, 0, y_0, 0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (8.6)$$

Перечисленные условия позволяют линеаризовать нелинейное уравнение (8.5) и анализировать уже линейную модель системы при малых отклонениях  $\Delta u(t)$ .



Разложим функцию  $F(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(m)}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)})$  в окрестности точки  $u = u_0, \dot{u} = 0, \ddot{u} = 0, \dots, u^{(m)} = 0, y = y_0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, \dots, y^{(n)} = 0$  в ряд Тейлора по переменным

$$u = u_0 + \Delta u; \dot{u} = \Delta \dot{u}, \ddot{u} = \Delta \ddot{u}, \dots, u^{(m)} = \Delta u^{(m)};$$

$$y = y_0, \dot{y} = \Delta \dot{y}, \ddot{y} = \Delta \ddot{y}, \dots, y^{(n)} = \Delta y^{(n)} :$$

$$F(u_0 + \Delta u, \Delta \dot{u}, \Delta \ddot{u}, \dots, \Delta u^{(m)}, y_0 + \Delta y, \Delta \dot{y}, \Delta \ddot{y}, \dots, \Delta y^{(n)}) =$$

$$= F(u_0, 0, 0, \dots, 0, y_0, 0, 0, \dots, 0) + \left( \frac{dF}{du} \right)_0 \Delta u + \left( \frac{dF}{d\dot{u}} \right)_0 \Delta \dot{u} + \left( \frac{dF}{d\ddot{u}} \right)_0 \Delta \ddot{u} +$$

$$+ \left( \frac{dF}{dy} \right)_0 \Delta y + \left( \frac{dF}{d\dot{y}} \right)_0 \Delta \dot{y} + \left( \frac{dF}{d\ddot{y}} \right)_0 \Delta \ddot{y} + \dots + \left( \frac{dF}{dy^{(n)}} \right)_0 \Delta y^{(n)} +$$

$$+ \text{члены высшего порядка малости.}$$

Здесь через  $\left( \frac{dF}{du} \right)_0, \left( \frac{dF}{du^{(i)}} \right)_0, \left( \frac{dF}{dy} \right)_0, \left( \frac{dF}{dy^{(j)}} \right)_0$  обозначены значения соответствующих частных производных при

$$u = u_0; y = y_0; u^{(i)} = 0; y^{(i)} = 0.$$

Первый член этого выражения в соответствии с (8.6) равен 0. Пренебрегая членами высшего порядка малости, получим:

$$\left( \frac{dF}{du} \right)_0 \Delta u + \sum_{j=1}^m \left( \frac{dF}{du^{(j)}} \right)_0 \Delta u^{(j)} + \left( \frac{dF}{dy} \right)_0 \Delta y + \sum_{i=1}^n \left( \frac{dF}{dy^{(i)}} \right)_0 \Delta y^{(i)} = 0. \quad (8.7)$$

Уравнение (8.7) называют линеаризованным уравнением нелинейной системы (8.5). Это уравнение является приближенным, так как в процессе его вывода были отброшены члены высшего порядка малости. Кроме того, в отличие от нелинейного уравнения (8.5), уравнение (8.7) устанавливает связь между соответствующими малыми

отклонениями воздействия  $\Delta u$  и реакции системы  $\Delta y$  от исходного состояния  $u = u_0, \dot{u} = 0, \ddot{u} = 0, \dots, u^{(m)} = 0; y = y_0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, \dots, y^{(n)} = 0$ .

Таким образом, линеаризация исходного нелинейного уравнения привела к линейному уравнению в отклонениях (другой термин — *уравнение в вариациях*).

### Пример 8.1

Дифференциальное уравнение движения транспортного средства имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = F_T - F_c, \quad (8.8)$$

где  $F_T$  — сила тяги;

$F_c = b_0 + b_1 v + b_2 v^2$  — сила сопротивления движению,  $b_0 > 0; b_1 > 0; b_2 > 0$ ;

$m$  — масса транспортного средства;

$v$  — скорость его движения.

Так как  $F_c$  — нелинейная функция скорости, то уравнение (8.8) — нелинейное. При силе тяги, равной  $F_{T0} > b_0$ , имеет место установившийся режим  $\left( \frac{dv}{dt} = 0 \right)$ :

$$0 = F_{T0} - F_c. \quad (8.9)$$

Следовательно, скорость установившегося режима может быть определена из уравнения (8.9):

$$b_2 v^2 + b_1 v + b_0 - F_{T0} = 0.$$

Откуда

$$v_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4(b_0 - F_{T0})b_2}}{2b_2}.$$

Так как  $F_T > 0$  и  $v_0 > 0$ , то

$$v_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4(F_T - a)c}}{2c}, \quad (8.10)$$

$$F_T = b_0 + b_1 v_0 + b_2 v_0^2.$$

Линеаризуем уравнение (8.8) в окрестности точки  $F_{T0}, v_0$  установившегося режима. Перенесем все члены уравнения (8.8) в левую часть:

$$m \frac{dv}{dt} - F_T + b_0 + b_1 v + b_2 v^2 = 0.$$

Разлагаем левую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки  $F_{T0}$  и  $v_0$  и отбрасываем члены высшего порядка малости:

$$-\Delta F_T + (b_1 + 2b_2 v_0) \Delta v + m \frac{d\Delta v}{dt} = 0.$$

Откуда линеаризованное уравнение имеет вид:

$$m \frac{d\Delta v}{dt} + (b_1 + 2b_2 v_0) \Delta v = \Delta F_T. \quad (8.11)$$

При линеаризации нелинейных систем следует обращать внимание на требования, предъявляемые к функции  $F(u, y)$ , входящей в уравнение (8.5). Необходимым условием для получения линеаризованного уравнения (8.7) является дифференцируемость этой функции. Линеаризация в указанном смысле недопустима в частности при однозначных и неоднозначных разрывных характеристиках. Эти характеристики называют *существенно нелинейными*. Для линеаризации существенных нелинейностей используют вибрационную, статистическую и гармоническую линеаризации. Кроме того, возможно применение и других методов, обеспечивающих учет особенностей работы соответствующего элемента.

Принципиально иной способ используется при линеаризации статической нелинейности идеального квантователя по уровню (см. рис. 3.4, з). Зависимость  $z_{\text{ВЫХ}}$  от  $z_{\text{ВХ}}$ , приведенная на рис. 3.4, з, может быть записана аналитически:

$$z_{\text{ВЫХ}} = E \left[ \frac{z_{\text{ВХ}}}{q} + \frac{1}{2} \text{sign } z_{\text{ВХ}} \right] q, \quad (8.12)$$

где  $E \left[ \frac{z_{\text{ВЫХ}}}{q} + \frac{1}{2} \text{sign } z_{\text{ВХ}} \right]$  — целая часть числа, заключенная в квадратных скобках;

$$\text{sign } z_{\text{ВХ}} = \begin{cases} 1 & \text{при } z_{\text{ВХ}} > 0; \\ -1 & \text{при } z_{\text{ВХ}} < 0; \\ 0 & \text{при } z_{\text{ВХ}} = 0; \end{cases}$$

$q$  — шаг квантования по уровню.

Эквивалентом выражения (8.12) является

$$z_{\text{ВЫХ}} = z_{\text{ВХ}} + \Delta, \quad (8.13)$$

где  $\Delta = kq - z_{\text{ВЫХ}}$  при  $kq - 0,5q \leq z_{\text{ВХ}} \leq kq + 0,5q$ .

Выражению (8.13) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 8.7. Погрешность квантования находится в диапазоне  $\pm q/2$ . В существующих системах управления число разрядов  $n$  аналого-цифрового преобразователя, осуществляющего квантование, как правило, не менее 8. Тогда «цена» младшего разряда, определяющего  $q$ , при  $0 \leq z_{\text{ВХ}} \leq A$  равна:

$$q = \frac{A}{2^n - 1}.$$

Приведенная максимальная погрешность при  $n = 8$  составляет:

$$\delta = \frac{\Delta_{\text{max}}}{A} = \frac{1}{2^n - 1} = 0,00392,$$

что менее 0,4 %. Во многих случаях этой погрешностью можно пренебречь. Тогда

$$z_{\text{ВЫХ}} = z_{\text{ВХ}}.$$

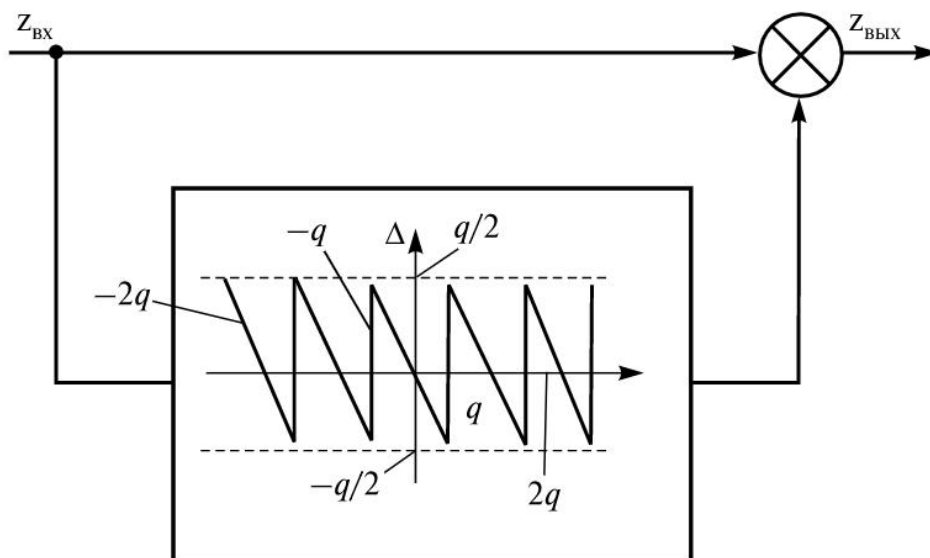


Рис. 8.7. Модель идеального квантователя

### 8.3. Определение статических характеристик группы нелинейных звеньев

Определение статических характеристик САУ с нелинейными звеньями значительно усложняется. Поскольку нелинейными являются статические характеристики тяговых двигателей э.п.с. [скоростная  $v(I)$ , электротяговая  $F(I)$ , тяговая  $F(v)$  и намагничивания  $\Phi(I)$ ], то необходимо рассмотреть процедуру построения эквивалентных характеристик для различных схем соединения нелинейных звеньев.

Для параллельно соединенных звеньев (рис. 8.8) эквивалентная статическая характеристика [кривая  $y_3(x)$ ] представляет собой сумму ординат их характеристик [кривые  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ ].

При последовательном соединении звена I (рис. 8.9, а), статическая характеристика которого  $x_1(x)$  располагается в квадранте I, и звена II с характеристикой  $y(x_1)$ , расположенной в квадранте II, характеристика эквивалентного звена  $y(x) = x_1(x) y(x_1)$  находится в квадранте IV.

Задаваясь каким-то значением  $x$ , например, для точки 1, из этой точки восстанавливают перпендикуляры в квадранты I и IV. Из точки 2 пересечения перпендикуляра с характеристикой  $x_1(x)$  проводят линию, параллельную оси абсцисс, до пересечения с характеристикой  $y(x_1)$  — точка 3. Абсцисса, соответствующая точке 3, равна искомому значению выходной координаты. Это значение переносят в квадрант IV с помощью биссектрисы ОА и перпендикуляров к осям  $x$  и  $x_1$  так, как показано стрелками. Полученная точка 5 принадлежит статической характеристике эквивалентного звена НЭ. Также можно найти другие точки характеристики  $y(x)$ .

Для построения эквивалентной статической характеристики трех последовательных звеньев (см. рис. 8.9, в) в квадрантах I—III рас-

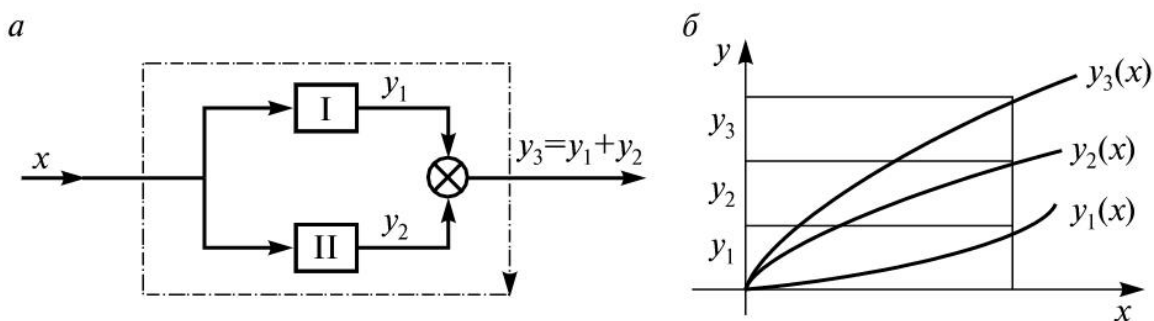


Рис. 8.8. Схемы (а) и характеристики (б) параллельно соединенных нелинейных звеньев

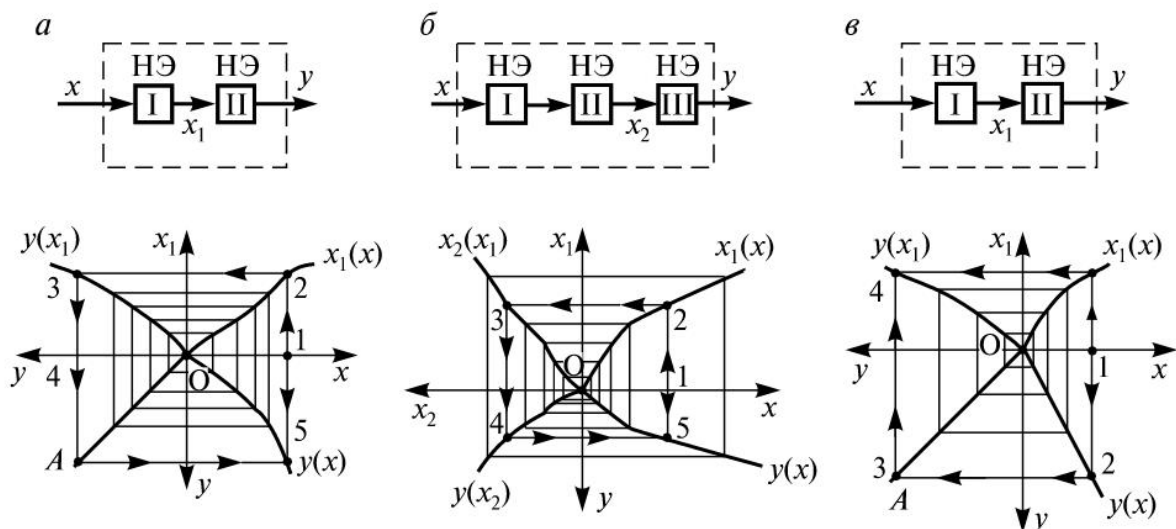


Рис. 8.9. Схемы (а, в, д) и характеристики (б, г, е), поясняющие процесс замещения эквивалентным звеном нелинейных звеньев, включенных последовательно. (Наклонные линии ОА в третьих квадрантах являются биссектрисами соответствующих углов.)

полагают характеристики исходных звеньев, а в квадранте IV рассмотренным способом получают эквивалентную статическую характеристику. Если в системе более трех звеньев, то их объединяют в группы по два-три звена, а затем по характеристикам групп определяют характеристику системы.

Таким же способом определяют характеристику одного из звеньев так, чтобы характеристика эквивалентного звена была линейной (ЛЭ — линейный элемент). Допустим, система состоит из двух звеньев (см. рис. 8.9, в) и характеристика звена I задана в квадранте I. В квадранте IV строят желаемую характеристику эквивалентного звена. Искомую характеристику звена II можно построить в квадранте II, используя биссектрису ОА. Такую же задачу можно решить и при большом числе звеньев.

Если звенья системы включены по схеме обратной связи (рис. 8.10, а)

$$y = y(x_1) = y[x - x_{oc}(y)], \quad (8.14)$$

то определение статической характеристики эквивалентного звена зависит от того, положительна или отрицательна эта связь. Для отрицательной обратной связи, определяя характеристику эквивалентного звена, характеристику звена в цепи прямой связи строят в квадранте I (см. рис. 8.10, б) — кривая  $y(x)$ , а характеристику звена в

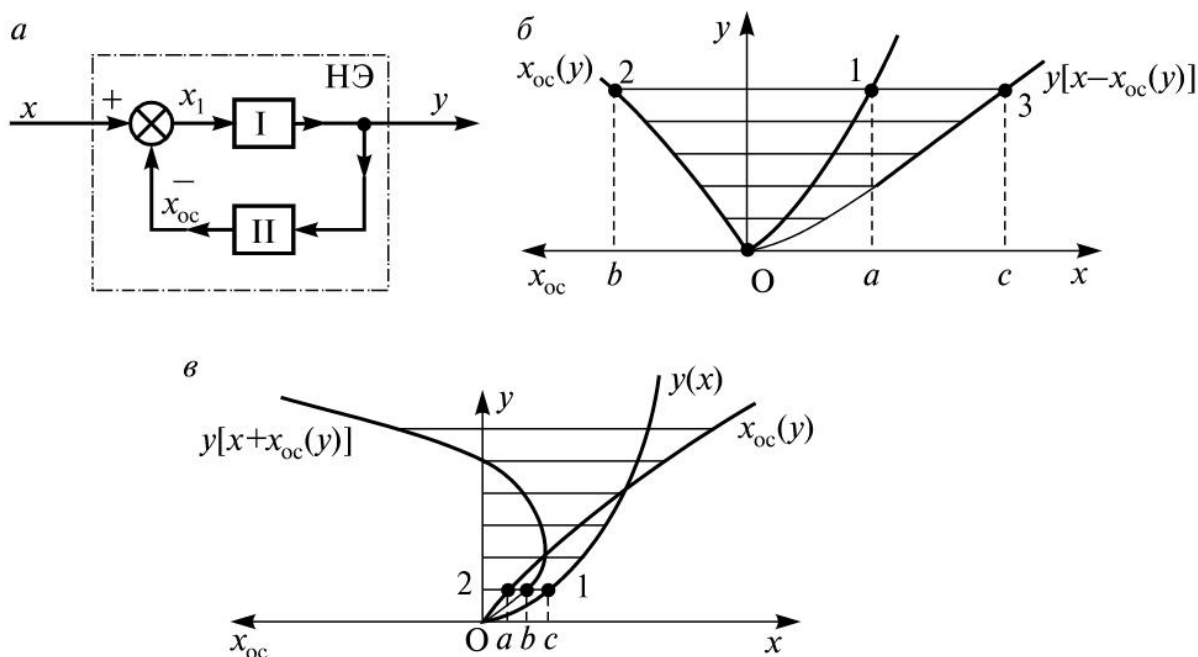


Рис. 8.10. Схема (а) и характеристики (б, в), поясняющие процесс замещения эквивалентным элементом двух нелинейных элементов, включенных по схеме обратной связи

цепи обратной связи строят в квадранте II — кривая  $x_{oc}(y)$ . Задаваясь каким-либо значением  $y$  (точка 1), определяют, каким должно быть значение входной координаты  $x$  при отрицательной обратной связи. В системе без обратной связи  $x$  определяют по кривой  $y(x)$ ;  $x$  равен отрезку  $Oa$ ; при обратной связи  $Oa = x - x_{oc}$ . Поэтому надо определить  $x_{oc}$ . Для заданного значения  $y$  искомое  $x = Oa + x_{oc}$ . На рис. 8.10, б показано, что точке 1 кривой  $y(x)$  соответствует точка 2 на кривой  $x_{oc}(y)$  и  $x_{oc} = Ob$ . Тогда искомое значение  $x = Oc = Oa + Ob$  и соответствует точке 3 статической характеристики [см. формулу (8.14)] эквивалентного звена. Такие же построения для других значений  $y$  определяют другие точки характеристики эквивалентного звена.

Для положительной обратной связи  $y = y(x_1) = y[x + x_{oc}(y)]$  и  $x = Oa - x_{oc}$ . Характеристики звеньев, включенных в цепи прямой и обратной связи, строят в квадранте I — кривые  $y(x)$  и  $x_{oc}(y)$  (см. рис. 8.10, в). Искомая абсцисса  $Oc$  результирующей характеристики равна разности абсцисс точек 1 и 2:  $Oc = Oa - Ob$ .

При отрицательной обратной связи результирующая статическая характеристика более пологая, чем исходные, а при положительной — более крутая.



Рассмотренные способы преобразования нелинейных характеристик звеньев используют на практике для построения статической характеристики САУ и определения необходимых значений коэффициентов усиления отдельных звеньев, входящих в состав САУ.

#### 8.4. Переходные процессы в нелинейной системе с существенно нелинейными звеньями

Переходные процессы в нелинейной системе автоматического управления с существенно нелинейным звеном рассмотрим на примере системы второго порядка с релейным элементом.

Заданная система предназначена для регулирования температуры в камере (рис. 8.11, *а*). Учитывая инерционность процесса нагрева и охлаждения, уравнение объекта регулирования записываем в виде:

$$T_1 \frac{d\theta}{dt} + \theta = k_1 \varphi,$$

где  $T_1$  — постоянная времени камеры,

$\theta$  — регулируемая температура,

$\varphi$  — положение регулирующего органа — заслонки, открываемой и закрываемой серводвигателем СД (вспомогательным двигателем). Измерительное устройство (ИУ) преобразует температуру в камере в электрический сигнал

$$u_1 = k_2 \theta.$$

Сигнал  $u_1$  вычитается в органе сравнения (ОС) из сигнала  $u_1 = k_2 \theta_3$ , где  $\theta_3$  — заданная температура. Напряжение  $x = u_2 - u_1 = k_2(\theta_3 - \theta)$  подается на катушку поляризованного реле ПР, имеющего зону нечувствительности  $\pm x_a$ . Характеристика этого существенно нелинейного звена приведена на рис. 8.4. Когда  $|x| > x_a$ , реле срабатывает и своими контактами в зависимости от знака рассогласования  $x$  подает напряжение  $u_v$  той или иной полярности на двигатель. Двигатель через редуктор Р изменяет положение  $\varphi$  регулирующего органа — заслонки. Так как постоянная времени камеры много больше постоянных времени остальных элементов системы, ее модель представляется структурной схемой, которая приведена на рис. 8.11, *б*.





$$\varphi = \int_0^t y dt; \quad (8.16)$$

$$T_1 \frac{d\theta}{dt} + \theta = k_1 \varphi. \quad (8.17)$$

Продифференцировав последнее уравнение и подставив в него  $\frac{d\varphi}{dt} = y$ , получим:

$$T_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_1 y. \quad (8.18)$$

Правая часть этого уравнения равна  $+k_1 y_B$  или  $-k_1 y_B$  в зависимости от того, в каком состоянии находится реле, переключение которого происходит в соответствии с условиями (8.15). Решение этого линейного уравнения имеет вид:

$$\frac{d\theta}{dt} = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \pm k_1 y_B; \quad (8.19)$$

$$\theta = -T_1 C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \pm k_1 y_B t + C_2, \quad (8.20)$$

где  $C_1, C_2$  произвольные постоянные, знаки второго слагаемого соответствуют знакам правой части.

Задаваясь начальными условиями при  $t = 0$ , определим положение реле,  $\varphi$  и, следовательно, знак правой части уравнения (8.18). Из уравнений (8.19), (8.20) при  $t = 0$  и заданных начальных условиях определяются  $C_1, C_2$ , затем  $\theta(t)$ .

Из уравнений  $\theta(t) = \frac{x_a}{k_2}$  или  $\theta(t) = -\frac{x_a}{k_2}$  (в зависимости от начальных условий) находят момент времени  $t_1$ , при котором происходит переключение реле, что соответствует смене знака правой части уравнения (8.18). Величины  $\theta(t_1) = \pm \frac{x_a}{k_2}$  и  $\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=t_1}$  являются начальными

условиями для определения произвольных постоянных, соответствующих движению системы на следующем участке и так далее. Такой способ решения называется «*припасовыванием*». Начальные условия и вид уравнения (в данном примере знак правой части) на  $n$ -м участке определяются значением переменных в конце  $n-1$  участка.

Рассмотрим переходный процесс при  $\theta_3 = 0$ . Тогда  $x = -k_2\theta$ . Обозначим  $\frac{x_a}{k_2} = b$ . Зададимся начальными условиями:

$$\theta(0) = -b; \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = -\lambda_0, \quad \text{причем } \lambda_0 > 0.$$

Тогда  $x(0) = k_2b = x_a$ ;  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \lambda_0 k_2 > 0$ . Следовательно, сигнал на

выходе релейного элемента равен  $+y_B$ . Решение дифференциального уравнения (8.17) определено выражениями (8.19), (8.20), в которых перед коэффициентом  $k_1$  знак «плюс». Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  вычислим из начальных условий:

$$\begin{aligned} -b &= -T_1 C_1 + C_2; \\ \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} &= \left[ C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + k_1 y_B \right]_{t=0} = -\lambda_0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} C_1 + k_1 y_B &= -\lambda_0; \quad C_1 = -(\lambda_0 + k_1 y_B); \\ C_2 &= T_1 C_1 - b = -T_1 (\lambda_0 + k_1 y_B) - b. \end{aligned}$$

Зависимости  $\theta(t)$  и  $\frac{d\theta}{dt}$  на первом участке от 0 до  $t_1$  определяются после подстановки коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  в (8.19) и (8.20):

$$\theta = -T_1 (\lambda_0 + k_1 y_B) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) - b + k_1 y_B t; \quad (8.21)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -(\lambda_0 + k_1 y_B) e^{-\frac{t}{T_1}} + k_1 y_B. \quad (8.22)$$

График  $\theta(t)$  приведен на рис. 8.12. При  $t = t_1$

$$\theta(t_1) = b; \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=t_1} = -(\lambda_0 + k_1 y_B) e^{-\frac{t_1}{T_1}} + k_1 y_B = \lambda_1.$$

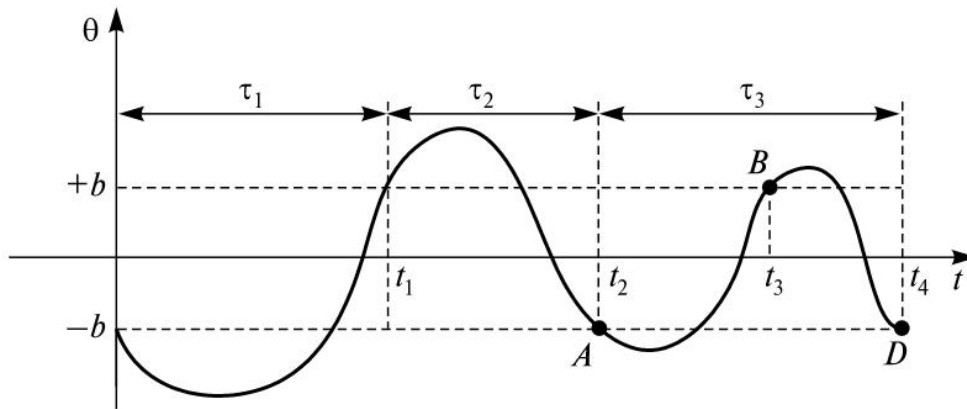


Рис. 8.12. График переходного процесса в системе регулирования температуры

Время  $t_1$  определяем из уравнения  $\theta(t_1) = b$ :

$$b = -T_1 (\lambda_0 + k_1 y_B) \left( 1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right) - b + k_1 y_B t_1. \quad (8.23)$$

Это трансцендентное уравнение можно решить графически. Пусть результат решения получен и величина  $t_1$  известна. Для определения  $\theta(t)$  на следующем участке используем выражения (8.19) и (8.20) решения дифференциального уравнения (8.18) с учетом того, что перед коэффициентом  $k_1$  знак «минус». Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдем, зная начальные условия:

$$\theta(0) = b; \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = -(\lambda_0 + k_1 y_B) e^{-\frac{t_1}{T_1}} + k_1 y_B = \lambda_1.$$

Длительность следующего участка  $t_2 - t_1 = \tau_2$  определим аналогично из условия  $\theta(\tau_2) = -b$ . Все остальные участки кривой переходного процесса будут определены такими же решениями, но только с другими значениями  $C_1, C_2, \lambda_i$ .

Выясним теперь, возможно ли решение, при котором  $\theta(t)$  — периодическая функция. Физически это означает, что в нелинейной системе устанавливается колебательный режим. Такой режим называют режимом *автоколебаний*.

Один цикл переходного процесса состоит из двух участков  $AB$  и  $BD$  (рис. 8.12). Для существования колебаний необходимо, чтобы на  $n$ -м цикле значения  $\theta$  и  $\frac{d\theta}{dt}$  в точке  $A$  равнялись бы  $\theta$  и  $\frac{d\theta}{dt}$  в точке  $D$ . Так как нелинейная статическая характеристика релейного звена симметрична, достаточно рассмотреть только один участок  $AB$  и потребовать, чтобы

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_B = - \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_A; \quad \theta_A = -b; \quad \theta_B = b.$$

Обозначив период искомых колебаний через  $T$ , а длительность участка  $AB$ , следовательно, через  $T/2$ , из (8.19) найдем:

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_B = C_1 e^{-\frac{T}{2T_1}} + k_1 y_B; \quad (8.24)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_A = C_1 + k_1 y_B. \quad (8.25)$$

Откуда

$$C_1 e^{-\frac{T}{2T_1}} + k_1 y_B = -C_1 - k_1 y_B$$

и

$$C_1 \left( 1 + e^{-\frac{T}{2T_1}} \right) + 2k_1 y_B = 0. \quad (8.26)$$

Положив в (8.20) для точки  $A$ :  $\theta = -b$  при  $t = 0$ ;  $\theta = b$  при  $t = \frac{T}{2}$ , получаем еще два уравнения:

$$-b = -T_1 C_1 + C_2; \quad (8.27)$$

$$b = -T_1 C_1 e^{-\frac{T}{2T_1}} + k_1 y_B \frac{T}{2} + C_2. \quad (8.28)$$

Решим систему уравнений (8.26—8.28) относительно неизвестных  $T_1$ ,  $C_1$  и  $C_2$ .

Из (8.27) и (8.28) следует:

$$2b = T_1 C_1 \left( 1 - e^{-\frac{T}{2T_1}} \right) + k_1 y_B \frac{T}{2}. \quad (8.29)$$

Определив  $C_1$  из (8.26) и подставив в (8.29), получим уравнение относительно  $T$ :

$$2b = T_1 \frac{-2k_1 y_B}{1 + e^{-\frac{T}{2T_1}}} \left( 1 - e^{-\frac{T}{2T_1}} \right) + k_1 y_B \frac{T}{2}. \quad (8.30)$$

Так как

$$\frac{1 - e^{-\frac{T}{2T_1}}}{1 + e^{-\frac{T}{2T_1}}} = \frac{e^{\frac{T}{4T_1}} \left( e^{\frac{T}{4T_1}} - e^{-\frac{T}{4T_1}} \right)}{e^{\frac{T}{4T_1}} \left( e^{\frac{T}{4T_1}} + e^{-\frac{T}{4T_1}} \right)} = \operatorname{th} \frac{T}{4T_1},$$

то уравнение (8.30) имеет вид

$$\operatorname{th} \frac{T}{4T_1} = \frac{T}{4T_1} - \frac{b}{k_1 y_B T_1}. \quad (8.31)$$

Полученное трансцендентное уравнение для  $T$  решается графически (рис. 8.13) при пересечении кривой  $y_1 = \operatorname{th} \frac{T}{4T_1}$  и прямой  $y_2 = \frac{T}{4T_1} - \frac{b}{k_1 y_B T_1}$ .

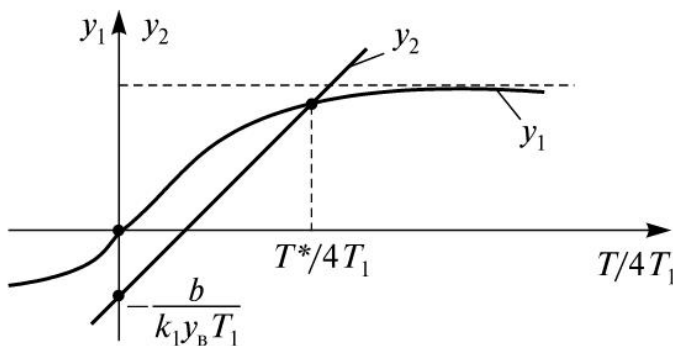


Рис. 8.13. Графический способ решения нелинейного уравнения

Если найдено положительное вещественное число  $T^*$ , то это свидетельствует о наличии периодического решения в данной динамической системе. Вместе с тем рассмотренное решение является только необходимым условием автоколебаний. Для того чтобы получить достаточное условие, иначе — дока-

зать устойчивость автоколебаний, требуется дополнительное рассмотрение, которое будет дано в следующем п. 8.5.

## 8.5. Фазовая плоскость. Многолистная фазовая плоскость

Фазовое пространство при описании модели системы управления дифференциальным уравнением второго порядка является фазовой плоскостью.

Задачи, рассматриваемые в теории линейных систем второго порядка, сводятся обычно к изучению процессов, описываемых дифференциальным уравнением

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t). \quad (8.32)$$

В теории нелинейных систем будем рассматривать модель, описываемую уравнением

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + \psi(y) = u(t). \quad (8.33)$$

При  $u(t) = \text{const} = u_0$  в установившемся режиме  $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$  и  $\psi(y) = u_0$ . Уравнение (8.33) является моделью системы со статической нелинейностью  $\psi(y)$ . Перейдем от уравнения «вход—выход» к дифференциальным уравнениям первого порядка, т.е. к модели системы в нормальной форме Коши. Обозначим  $y = x_1, \frac{dx_1}{dt} = x_2$ . Тогда из (8.33) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{a_2} [-a_1 x_2 - \psi(x_1) + u(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

При  $u(t) = \text{const}$  правая часть второго уравнения не зависит от времени и система (8.34) будет автономной. В общем виде автономная система может быть записана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(x_1, x_2). \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

Динамику системы будем изучать при ее движении от заданных начальных условий, когда  $u = \text{const}$ . Такой подход позволяет анализировать переходные процессы в автономной системе.

Из (8.35) можно получить уравнение фазовой траектории на фазовой плоскости, поделив второе уравнение на первое:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}. \quad (8.36)$$



Решая (8.36), определим  $x_2 = \varphi(x_1)$  — фазовую траекторию. В более общем виде уравнения (8.35) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= Q(x_1, x_2); \\ \frac{dx_2}{dt} &= P(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \text{ и } \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{P(x_1, x_2)}{Q(x_1, x_2)}, \quad (8.37)$$

где  $Q$  и  $P$  — в общем случае нелинейные функции координаты  $x_1$  и скорости ее изменения  $x_2$ .

В состоянии равновесия — в установившемся режиме —  $\frac{dx_1}{dt} = 0$ ;

$\frac{dx_2}{dt} = 0$ , т.е.  $Q(x_1, x_2) = 0$  и  $P(x_1, x_2) = 0$ .

Правая часть уравнения (8.37) при этом становится неопределенной. Назовем точки фазовой траектории, в которых функции  $Q$  и  $P$  равны 0, *особыми*. Для уравнений (8.35) особой точкой является  $x_2 = 0$  и  $f(x_1, x_2) = 0$ .

Сформулируем свойства фазовой траектории:

- через каждую точку фазовой плоскости (за исключением особых точек) проходит одна фазовая траектория;
- изображающая точка  $(x_1, x_2)$  при возрастании времени  $t$  движется по часовой стрелке.

Действительно, с ростом переменной  $x_1$  ее скорость изменения  $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$  положительна, при убывании  $x_1$  ее скорость изменения отрицательна. Обратим внимание на то, что в том случае, когда модель системы определяется уравнениями (8.35), в соответствии с (8.36) при  $f \neq 0$   $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{dx_2}{dx_1} = \infty$ . Это значит, что фазовые траектории

пересекают ось абсцисс под углом в  $90^\circ$ .

В зависимости от того, однозначна или нет функция  $f(x_1, x_2)$ , входящая в систему (8.35), может идти речь либо об одной фазовой плоскости, либо о совокупности фазовых плоскостей, определенным образом стыкуемых между собой. Во втором случае вводится так называемая *многолистная фазовая плоскость*.

Рассмотрим оба эти случая на примере. Пусть система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \begin{cases} f_1(x_1, x_2) & \text{при } x_2 > \psi(x_1) \\ f_2(x_1, x_1) & \text{при } x_2 < \psi(x_1) \end{cases}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

В (8.39)  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  однозначные функции своих аргументов, определенные в соответствующей области фазовой плоскости (рис. 8.14). Точки, лежащие на кривой  $\psi(x_1)$ , являются точками, на которых происходит переключение правой части уравнения (8.39). При этом фазовая траектория состоит из частей, определяемых системой уравнений, справедливой только для данной области. Для области  $x_2 > \psi(x_1)$  справедлива система уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = f_1(x_1, x_2),$$

а для области  $x_2 < \psi(x_1)$  справедлива другая система уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2).$$

В данном случае мы имеем дело с фазовой плоскостью некоторой нелинейной системы с линией переключения  $x_2 = \psi(x_1)$ . Для любой точки плоскости  $(x_1, x_2)$  дальнейшие движения однозначно определяются системой уравнений (8.39).

Рассмотрим далее случай, когда функция  $f(x_1, x_2)$  неоднозначна. Такие модели соответствуют системам автоматического управления, содержащим устройства, имеющие люфты, реле

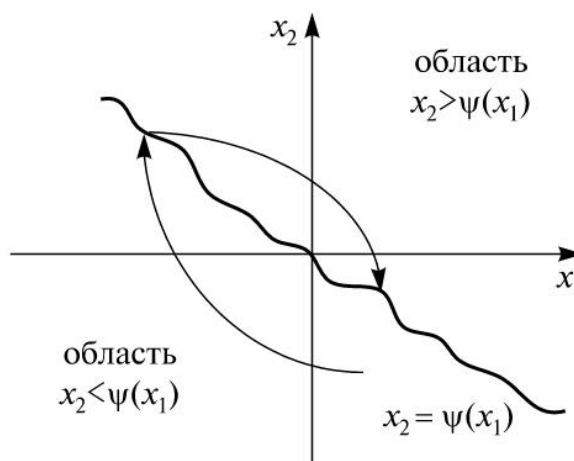


Рис. 8.14. Фазовая плоскость системы с однозначной нелинейностью

с гистерезисом и т.д. Подобная система описана в п. 8.4. Используем многолистную фазовую плоскость для ее анализа. Математическая модель системы задана уравнениями (8.15) и (8.18). Координаты

фазовой плоскости  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ .

Тогда дифференциальное уравнение (8.18) представим в нормальной форме Коши:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad (8.40)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{T_1} [k_1 y - x_2]. \quad (8.41)$$

В соответствии с характеристикой (8.15) релейного элемента при  $\theta_3 = 0$

$$y = y_B \begin{cases} \text{при } x_1 = \theta > \frac{x_a}{k_2} = b & \text{и } x_2 = \frac{d\theta}{dt} > 0; \\ \text{при } x_1 = \theta > -\frac{x_a}{k_2} = -b & \text{и } x_2 = \frac{d\theta}{dt} < 0. \end{cases}$$

Этим условиям соответствует заштрихованная часть фазовой плоскости (рис. 8.15, лист 1). Уравнение фазовых траекторий листа 1 имеет вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k_1}{T_1 x_2} - \frac{1}{T_1}. \quad (8.42)$$

Решение этого уравнения:

$$x_1 = k_1 y_B T_1 \ln |x_2 - k_1 y_B| - T_1 x_2 + C_1, \quad (8.43)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная.

Каждому произвольному значению  $C_1$  соответствует фазовая траектория на листе 1 (см. рис. 8.15). Так как  $C_1$  можно вычислить из уравнения (8.43), задавшись начальными условиями  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$ , то каждая фазовая траектория определяется точкой начала движения.

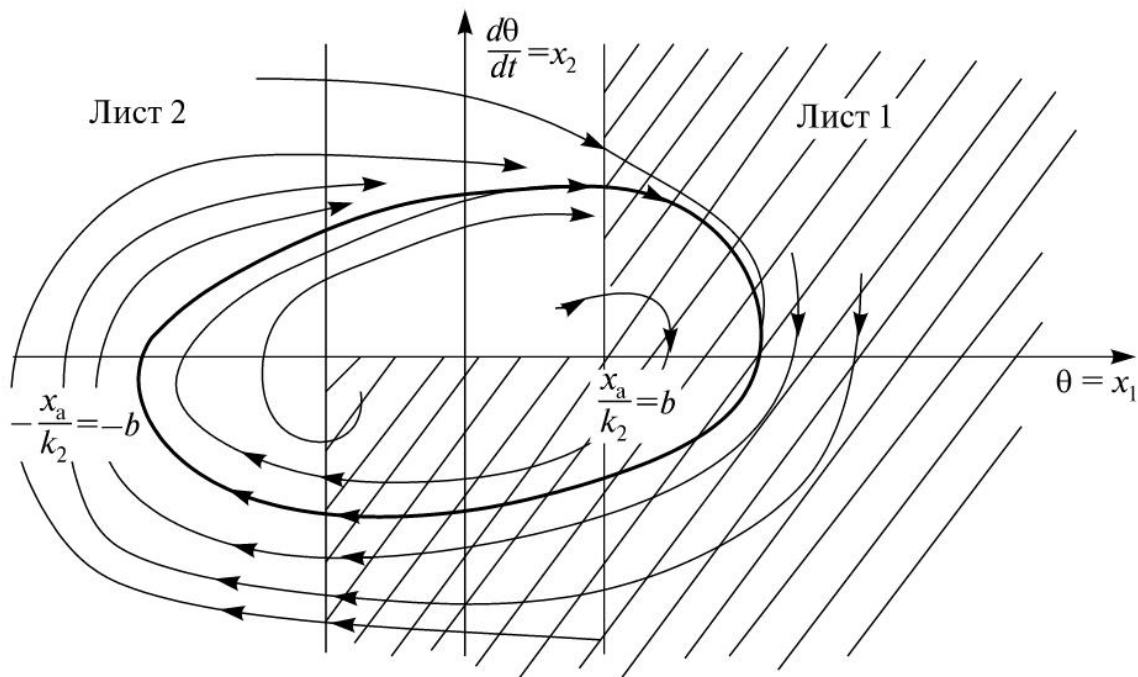


Рис. 8.15. Многолистная фазовая плоскость

В соответствии с характеристиками (см. рис. 8.15) релейного элемента при  $\theta_3 = 0$

$$y = y_B \begin{cases} \text{при } x_1 = \theta < \frac{x_a}{k_2} = b & \text{и } x_2 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx_1}{dt} > 0; \\ \text{при } x_1 = \theta < -\frac{x_a}{k_2} = -b & \text{и } x_2 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx_1}{dt} < 0. \end{cases}$$

Этим условиям соответствует незаштрихованная часть фазовой плоскости (лист 2). В правой части уравнения (8.41)  $y = -y_B$ . Из (8.40) и (8.41) получаем дифференциальное уравнение фазовой траектории (лист 2)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k_1 y_B}{T_1 x_2} - \frac{1}{T_1}. \quad (8.44)$$

Решение этого уравнения:

$$x_1 = k_1 y_B T_1 \ln |x_2 + k_1 y_B| - T_1 x_2 + C_2, \quad (8.45)$$

где  $C_2$  — произвольная постоянная.

Каждому произвольному значению  $C_2$  соответствует фазовая траектория на листе 2 (см. рис. 8.15). Так как  $C_2$  можно вычислить из уравнения (8.45), задавшись начальными условиями  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  из листа 2, то каждая фазовая траектория определяется точкой начала движения.

В результате получается, что фазовые траектории расходятся от точек, близких к началу координат и приближающихся к циклу, показанному на рис. 8.15 жирной кривой. Фазовые траектории, начинающиеся в бесконечности, сходятся к тому же циклу. Следовательно, в данной системе будут наблюдаться устойчивые автоколебания, к которым сходится переходный процесс с обеих сторон, т.е. при любых начальных условиях.

Приведенный пример позволяет сформулировать последовательность построения фазовой траектории на многолистной фазовой плоскости:

- дифференциальное уравнение системы, имеющей неоднозначную правую часть, разделяется на ряд дифференциальных уравнений с однозначной правой частью; определяются области существования этих правых частей;
- из физических соображений, отражающих свойства нелинейности, устанавливается порядок перехода от одной системы уравнений к другой;
- строится фазовая траектория для каждой системы уравнений на своем листе фазовой плоскости;
- «скрепляются» листы фазовых плоскостей между собой в соответствии с исходной моделью вдоль тех участков границ отдельных листов, через которые изображающие точки выходят за границы листов.

## 8.6. Устойчивость нелинейных систем

Для нелинейных систем понятие устойчивости является гораздо более сложным, чем для линейных. Это вызвано значительным разнообразием движений в нелинейных системах. Основы теории устойчивости заложены А.М. Ляпуновым в 90-х годах XIX века. Так как решение дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений), являющегося моделью динамической системы, определяет переходные и установившиеся процессы, иначе —

движение системы, то дальнейшие термины «движение системы» и «решение уравнения системы» будем считать эквивалентными.

Пусть модель нелинейной системы управления задана в нормальной форме Коши системой дифференциальных уравнений (см. выражение 8.4). Решение системы при заданных начальных условиях будем называть невозмущенным движением системы. Частным случаем невозмущенного движения является состояние покоя системы. В общем случае невозмущенным движением является любое решение системы дифференциальных уравнений. Пусть из всех возможных решений выбрано в качестве невозмущенного движения  $x^*$ :

$$\dot{x}_i^*(t) = F_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, u_1, u_2, \dots, u_n) = F_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

при начальных условиях

$$x_1^*(0), x_2^*(0), \dots, x_n^*(0), \quad u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0.$$

Все другие движения будем называть в этом случае возмущенными

$$\dot{x}_i(t) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим символом  $\Delta x_i$  отклонение от невозмущенного движения:

$$\Delta x_i(t) = x_i(t) - x_i^*(t) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - F_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.47)$$

и отклонения начальных условий соответственно:

$$\Delta x_i(0) = x_i(0) - x_i^*(0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В зависимости от  $\Delta x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и свойств динамической системы возможны следующие варианты поведения возмущенных движений по отношению к невозмущенному.

*1-й вариант.* Возмущенные движения всегда расходятся по отношению к невозмущенному, т.е. как бы ни были малы начальные отклонения  $\Delta x_i(0)$ , в дальнейшем  $\Delta x_i(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*2-й вариант.* Имеется такая область начальных отклонений  $\Delta x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (пусть сколь угодно малая), при которой возмущенные движения не расходятся по отношению к невозмущенному во всем диапазоне изменения  $t$ , т.е.  $\Delta x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , конечны при  $0 < t < \infty$ .

*3-й вариант.* Имеется такая область начальных отклонений  $\Delta x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (пусть сколь угодно малая), при которой возмущенные движения сходятся к невозмущенному, т.е.  $\Delta x_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , при  $\tau \rightarrow \infty$ .

В первом случае невозмущенное движение неустойчиво, во втором случае — устойчиво (по Ляпунову), в третьем — асимптотически устойчиво. Ниже будут даны более строгие определения введенных понятий.

В теории автоматического управления принято невозмущенными движениями выбирать установившийся режим работы системы. В частности, тривиальным решением системы однородных дифференциальных уравнений  $\dot{X} = F(X)$  при нулевых начальных условиях  $X^*(0) = 0$ , является равенство нулю всех фазовых координат  $X^*(t) = 0$ . Этот режим может быть выбран как невозмущенное движение.

Рассмотрим, насколько этот подход является правомочным. В соответствии с (8.47)

$$x_i(t) = \Delta x_i(t) + x_i^*(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.48)$$

Подставим  $x_i(t)$  в систему однородных дифференциальных уравнений:

$$\dot{X} = F(X), \quad (8.49)$$

получаем:

$$\dot{X}^* + \Delta \dot{X} = F(X^* + \Delta X). \quad (8.50)$$

Учитывая, что  $X^*(t)$  — невозмущенное движение — результат решения системы дифференциальных уравнений (8.49), т.е.

$$\dot{X}^* = F(X^*), \quad (8.51)$$

из (8.50) с учетом (8.51) имеем:

$$\Delta \dot{X} = F(X^* + \Delta X) - F(X^*). \quad (8.52)$$

Если невозмущенное движение системы соответствует состоянию покоя системы, т.е.  $F(X^*) = 0$ , что соответствует тривиальному решению системы (8.49), то в этом случае

$$\Delta \dot{X} = F(X^* + \Delta X). \quad (8.53)$$



Итак, задача устойчивости невозмущенного движения сведена к задаче устойчивости состояния покоя системы.

Перейдем к более строгому введению основных понятий теории устойчивости. Будем считать, что фазовые координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , функции  $F_i, i = 1, 2, \dots, n$ , заданы в некоторой области  $G$  фазового пространства. Задание области  $G$  означает, что внутри этой области поведение системы описывается системой уравнений (8.4). Расстояние (метрика) между точками фазового пространства задано евклидовой метрикой: квадрат расстояния  $L^2$  между точками  $a$  и  $b$  определяется выражением

$$L^2 = (x_{1a} - x_{1b})^2 + (x_{2a} - x_{2b})^2 + \dots + (x_{na} - x_{nb})^2,$$

где  $x_{ia}$  и  $x_{ib}$  — соответствующие проекции точек  $a$  и  $b$  на оси координат фазового пространства.

Тогда квадрат расстояния любой точки из области  $G$  до начала координат

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Для момента времени  $t = 0$

$$R_0^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2(0).$$

Теперь можно сформулировать условие устойчивости более строго:

*Невозмущенное движение устойчиво (по Ляпунову), если при всяком положительном  $\varepsilon$  как бы оно не было мало, можно указать такое  $\delta$ , что для всех начальных  $x_i(0)$ , удовлетворяющих условию  $R_0 < \delta$ , отклонения  $\Delta x_i(t) i = 1, 2, \dots, n$  будут удовлетворять неравенству  $R < \varepsilon$  при любом  $0 \leq t \leq \infty$ .*

Если кроме сформулированного условия,  $R \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то невозмущенное движение будет *асимптотически устойчиво*.

В том случае, когда в качестве невозмущенного движения выбрано состояние покоя системы в начале фазовых координат, асимптотическая устойчивость физически означает, что все фазовые траектории стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к началу координат.

Если для выполнения условий асимптотической устойчивости требуется, чтобы область начальных отклонений  $\delta$  была достаточно



мала, то говорят об асимптотической устойчивости *в малом*. Если область  $\delta$  имеет конечные размеры, то говорят об асимптотической устойчивости *в большом*. Если, наконец, условия асимптотической устойчивости выполняются при сколь угодно больших отклонениях начальных условий в области  $G$ , то говорят об асимптотической устойчивости *в целом*.

В качестве невозмущенного движения можно выбрать периодические движения системы (автоколебания). Этому движению соответствует замкнутая кривая в фазовом пространстве (см. п. 8.5).

Для оценки устойчивости автоколебаний удобно ввести понятие *орбитальной устойчивости*.

Представим возмущенные движения фазовой траекторией, которая является геометрическим местом точек конца вектора  $x(t)$ . Для любого момента времени  $t$  можно определить кратчайшее расстояние от конца вектора  $x(t)$  до замкнутой кривой  $\Gamma$ , которое обозначим  $\rho[x(t), \Gamma]$ . Под орбитально устойчивым периодическим движением (автоколебанием) в автономной системе управления будем понимать такое движение, для которого

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho[x(t), \Gamma] = 0.$$

Пример системы автоматического управления с устойчивыми автоколебаниями уже был рассмотрен в п. 8.4.

## 8.7. Оценка устойчивости нелинейных систем по уравнениям первого приближения

В том случае, когда модель нелинейной системы задана уравнением (8.5) и нелинейная функция  $F$  непрерывна и имеет все производные по своим аргументам, можно линеаризовать модель. Способ линеаризации изложен в п. 8.3. Линеаризованное уравнение в отклонениях от точки, в окрестностях которой проведена линеаризация, называется уравнением первого приближения. Поскольку это уравнение линейно, то для устойчивости решения необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости (см. п. 3.3). При этом имеется в виду асимптотическая устойчивость, так как в устойчивой линейной системе при  $t \rightarrow \infty$  фазовая траектория возвращается в точку покоя. Возникает

вопрос: будет ли устойчива в данном режиме нелинейная система, если ее устойчивость проверена только по уравнению первого приближения. Ответ на этот вопрос дают теоремы А.М. Ляпунова.

**Первая теорема.** Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет корни только с отрицательными действительными частями, то возмущенное движение устойчиво и при том асимптотически, каковы бы ни были отброшенные при разложении в ряд Тейлора в процессе линеаризации нелинейные члены ряда.

**Вторая теорема.** Если между корнями характеристического уравнения линеаризованной системы находятся такие корни, действительные части которых положительны, то невозмущенное движение неустойчиво, какие бы ни были отброшенные при разложении в ряд Тейлора в процессе линеаризации члены ряда.

Особыми являются случаи, когда корни характеристического уравнения линеаризованной системы находятся на мнимой оси. В этих случаях по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости или неустойчивости системы.

Таким образом, переход от нелинейной системы к описанию уравнением первого приближения позволяет свести анализ устойчивости нелинейной системы вблизи точки линеаризации к анализу устойчивости линейной системы.

## 8.8. Прямой метод Ляпунова

А.М. Ляпунов предложил метод, позволяющий получать достаточные условия устойчивости нелинейных систем автоматического управления, получившей название *прямого метода Ляпунова*. Как показано в п. 8.6, запись уравнения возмущенного движения в отклонениях сводит задачу об устойчивости невозмущенного движения к устойчивости точки покоя. Ниже будем рассматривать метод Ляпунова применительно к устойчивости точки покоя. Автономная линейная система задана своей моделью в виде нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.54)$$

где  $x_i$  — фазовые координаты.

Координаты положения точки покоя определяются из решения системы уравнений (8.54) при  $\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ :

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.55)$$

Для простоты изложения будем считать, что система нелинейных алгебраических уравнений (8.55) имеет единственное решение в начале координат, т.е. при  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ .

А.М. Ляпунов ввел специальную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданную в области  $G$  фазового пространства и обладающую следующими свойствами:

- функция  $V$  и все ее частные производные первого порядка  $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  непрерывны в некоторой открытой области, содержащей начало координат;
- в начале координат функция  $V = 0$ ;
- всюду внутри рассматриваемой открытой области, кроме начала координат, функция  $V \neq 0$  и имеет значения одного знака. Такие функции называют *знакоопределенными*. Это понятие отличается от понятия *знакопостоянная функция*, которая может быть, в отличие от знакоопределенной, равна 0 не только в начале координат, в остальных же точках знакопостоянная функция сохраняет постоянство знака.

А.М. Ляпуновым получены достаточные условия устойчивости нелинейных систем, им доказано следующее.

Если система дифференциальных уравнений (8.54) такова, что можно найти знакоопределенную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , производная которой  $dV/dt$  в соответствии с системой (8.54) была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$ , или тождественно равной нулю, то равновесие системы в начале координат устойчиво. Если производная  $dV/dt$  — знакоопределенная функция противоположного знака с  $V$ , то равновесие системы в начале координат асимптотически устойчиво.

Если  $V$  — функция Ляпунова подобрана, то для определения знака ее производной нет необходимости решать систему дифференциальных уравнений (8.54). Действительно, поскольку

$$\frac{dV(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

а

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

в соответствии с (8.54), то

$$\frac{dV(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.56)$$

В общем случае, к сожалению, отсутствуют рекомендации по однозначному подбору  $V$ -функции. Это в значительной мере определяет трудности при практическом использовании метода Ляпунова.

Для систем автоматического управления, имеющих структуру, показанную на рис. 8.16, а,  $V$ -функции могут быть взяты в форме, предложенной А.И. Лурье и В. Н. Постниковым [21]:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = L(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta \int_0^x z(\xi) d\xi, \quad (8.57)$$

где

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (8.58)$$

так называемая квадратичная форма;

$a_{ij}$  и  $\beta$  — постоянные коэффициенты, причем  $a_{ij} = a_{ji}$ ;

$z(\xi)$  — статическая характеристика безынерционного нелинейного звена, причем  $z(0) = 0$ ,  $\xi \cdot z(\xi) > 0$  при  $\xi \neq 0$ .

Пример статической характеристики нелинейного звена приведен на рис. 8.16, б. Условия  $\xi \cdot z(\xi) > 0$  и  $z(0) = 0$  говорят о том, что статическая характеристика

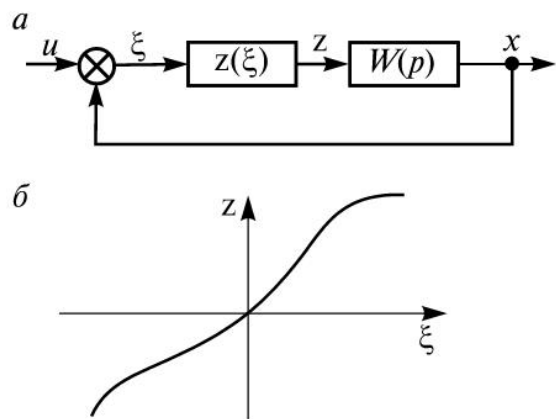


Рис. 8.16. Структурная схема системы со статической нелинейностью (а) и статическая характеристика нелинейного звена (б)

находится в 1-м и 3-м квадрантах и проходит через начало координат. Остальная часть системы определяется линейной моделью, имеющей передаточную функцию  $W(p)$ . Практическим примером, соответствующим этой структурной схеме, в частности, является линейный объект, передаточная функция которого  $W(p)$ , и нелинейный безынерционный регулятор со статической характеристикой  $z(\xi)$ , в цепи обратной связи,  $u$ -сигнал управления. Выполним исследование устойчивости, приведенной на рис. 8.16, а с использованием прямого метода Ляпунова.

### Пример 8.2

Математическая модель объекта задана:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}.$$

Сигнал  $x$  на выходе объекта поступает на вход элемента сравнения, где вычитается из сигнала управления  $u$  (см. рис. 8.16, а). Сигнал рассогласования  $\xi = u - x$  поступает на вход безынерционного регулятора, имеющего статическую характеристику  $z(\xi)$ , удовлетворяющую условиям  $z(0) = 0$ ,  $\xi \cdot z(\xi) > 0$  при  $\xi \neq 0$ . Требуется проверить устойчивость положения равновесия в системе.

Уравнения движения системы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} T_1 \frac{dx}{dt} + x &= k_1 z(\xi); \\ \xi &= u - x. \end{aligned}$$

При  $u = 0$ ,  $\xi = -x$  и процессы в системе могут быть описаны одним уравнением первого порядка

$$T_1 \frac{dx}{dt} + x = -k_1 z(x),$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} z(x). \quad (8.59)$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} x^2 + \int_0^x z(\xi) d\xi. \quad (8.60)$$

Тогда ее производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = [x + z(x)] \frac{dx}{dt}; \quad (8.61)$$

Подставив первую часть (8.59) в (8.61), получим:

$$\frac{dV}{dt} = -[x + z(x)] \left[ \frac{x}{T_1} + \frac{k_1}{T_1} z(x) \right] = - \left[ \frac{x^2}{T_1} + \frac{k_1}{T_1} z^2(x) + \frac{1+k_1}{T_1} x \cdot z(x) \right].$$

При  $x \cdot z(x) > 0$  производная  $\frac{dV}{dt}$  отрицательна во всем диапазоне фазового пространства, если  $k_1 > 0$ . Таким образом, достаточным условием асимптотической устойчивости в целом для системы первого порядка с инерционным звеном является положительность коэффициента усиления  $k_1$  правой части. При этом характеристика нелинейного элемента может иметь произвольный вид и лишь не должна выходить за пределы первого и третьего квадрантов (см. рис. 8.16, б). Она может иметь также разрывы, но должна быть однозначной.

*Абсолютной устойчивостью называют асимптотическую устойчивость равновесия в целом для систем, структурная схема которых приведена на рис. 8.16, а, и нелинейностей, принадлежащих определенному классу.*

При этом рассматриваются (рис. 8.17) нелинейные характеристики, заключенные внутри угла, образованного прямыми  $z = kx$  и  $z = rx$  ( $k > r$ ), в первом и третьем квадрантах. Про такие характеристики будем говорить, что они заключены в секторе  $[r, k]$ . Частный случай такой нелинейной характеристики приведен пунктирной кривой на рис. 8.17. Пример абсолютно устойчивой системы, у которой нелинейные характеристики заключены внутри сектора  $[0, \infty]$  был рассмотрен в предыдущем параграфе. Критерии абсолютной устойчивости позволяют анализировать устойчивость систем управления для определенного в данном секторе класса нелинейностей и заданной передаточной функции линейной части системы.

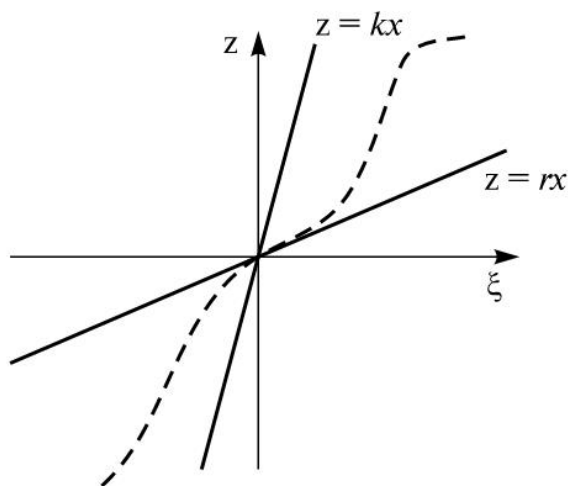


Рис. 8.17. Статическая характеристика нелинейного звена, заключенная в секторе  $[r, k]$



## 8.9. Метод гармонической линеаризации

**Общая характеристика метода.** Метод гармонической линеаризации (метод гармонического баланса) является приближенным аналитическим методом исследования нелинейных систем, модель которых, в частности, может быть сведена к виду, представленному на рис. 8.18. Здесь  $Z(\Delta x)$  — безынерционная нелинейность,  $W_L(p)$  — передаточная функция линейной части системы.

Метод гармонической линеаризации, основанный на работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, был предложен Л.С. Гольдфарбом в 1940 г. [23, 35]. Различные модификации этого метода опубликовали значительно позже ученые многих стран: Тастин в Англии, Оппельт в ФРГ, Дютиль во Франции, Кюхенбургер в США [35]. В СССР дальнейшее развитие метод гармонической линеаризации получил в работах Е.П. Попова, И.П. Пальтова, Ю.И. Тончеева, Я.З. Цыпкина, М.А. Айзермана, И.М. Смирновой, В.А. Тафта и многих других [28].

Рассмотрим основную идею метода. Предположим, что в замкнутой системе, приведенной на рис. 8.18, при равенстве  $x_{\text{вх}} = 0$  существуют автоколебания:

$$x_{\text{вых}} \approx U_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.62)$$

Тогда при  $x_{\text{вх}} = 0$  на входе нелинейного элемента сигнал

$$\Delta x(t) = -x_{\text{вых}}(t). \quad (8.63)$$

Пусть  $\Delta x(t) = A \sin \omega t$ , тогда на выходе нелинейного элемента будет периодический сигнал  $z(t)$ , который может быть представлен рядом Фурье. Принята гипотеза: линейная часть системы с передаточной функцией  $W_L(p)$  имеет такую амплитудно-частотную характеристику, что в установившемся режиме на ее выходе гармоники, кроме 1-й, пренебрежимо малы. Иначе говоря, линейная часть системы является фильтром нижних частот, на выходе которого амплитуда первой гармоники значительно превышает амплитуды более высоких гармоник. Это допущение носит название «гипотезы фильтра». Объяснение этого термина рассмотрим

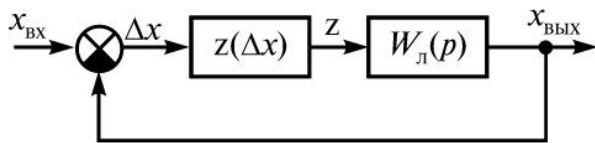


Рис. 8.18. Структурная схема нелинейной системы

амплитуда первой гармоники значительно превышает амплитуды более высоких гармоник. Это допущение носит название «гипотезы фильтра». Объяснение этого термина рассмотрим

ниже. При выполнении принятого допущения и существовании моногармонических автоколебаний в соответствии с (8.63)

$$A \sin \omega t - U_{\text{ВЫХ}} \sin(\omega t + \varphi) = 0. \quad (8.64)$$

Последнее выполняется при

$$A = U_{\text{ВЫХ}}, \quad (8.65)$$

$$\varphi = \pi. \quad (8.66)$$

Эти условия называются условиями гармонического баланса: (8.65) — условие баланса амплитуд, (8.66) — условие баланса фаз. Откуда рассматриваемый метод называют также методом гармонического баланса.

Этот метод был разработан для решения задач, позволяющих определить наличие или отсутствие автоколебаний в системе, рассчитать амплитуду и частоту устойчивых автоколебаний при их наличии. Поэтому исследователь, приступающий к анализу системы и допускающий наличие автоколебаний, не знает их частоту. В этом случае утверждение того, что линейная часть системы является фильтром нижних частот, не имеет оснований.

Можно предположить (выдвинуть гипотезу) о фильтрующих свойствах линейной части системы, использовать далее рассматриваемый метод, определить наличие и частоту устойчивых автоколебаний при сформулированной гипотезе. После чего проверить ее выполнение и сделать выводы о достоверности результата решения. Изложенное поясняет возникновение термина «гипотеза фильтра».

Перейдем далее к гармонической линеаризации нелинейного элемента. Выход  $z$  безынерционного нелинейного элемента является функцией входа  $\Delta x$  при отсутствии гистерезиса и функцией  $\Delta x$  и  $d\Delta x/dt$  при наличии гистерезиса. Точнее, при наличии гистерезиса знак производной определяет статическую характеристику. В общем случае

$$z = f\left(\Delta x, \frac{d\Delta x}{dt}\right). \quad (8.67)$$

На вход нелинейного элемента НЭ (рис. 8.19) поступает гармонический сигнал

$$\Delta x(t) = A \sin \omega t = A \sin \psi, \quad (8.68)$$

где  $\psi = \omega t$ .

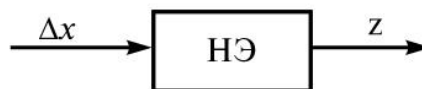


Рис. 8.19. Безынерционный нелинейный элемент



Вычислив

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A\omega \cos \omega t = A\omega \cos \psi$$

и подставив полученное значение, а также выражение (8.68) в (8.67), на выходе НЭ получаем периодический сигнал

$$z = f \left( \begin{array}{l} \Delta x = A \sin \omega t = A \sin \psi; \\ \frac{d\Delta x}{dt} = A \omega \cos \omega t = A \omega \cos \psi. \end{array} \right) \quad (8.69)$$

Разлагая (8.69) в ряд Фурье, получаем:

$$z = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \sin k\psi + \sum_{k=1}^N b_k \cos k\psi \right\}; \quad (8.70)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) d\psi; \quad (8.71)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin k\psi d\psi; \quad (8.72)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos k\psi d\psi. \quad (8.73)$$

Начнем рассмотрение с частного случая

$$a_0 = 0. \quad (8.74)$$

Это условие соответствует отсутствию постоянной составляющей на выходе НЭ. Характеристика нелинейного элемента, приведенная на рис 8.20, удовлетворяет (8.74). В дальнейшем будет рассмотрен общий случай, когда  $a_0 \neq 0$ .

Считая, что гипотеза фильтра выполняется и, следовательно, гармоники, начиная со второй, поступающие на вход линейной части,

оказывают несущественное влияние на сигнал  $x_{\text{вых}}(t)$ , представим приближенно  $z(t)$  его первой гармоникой:

$$z \approx a_1 \sin \psi + b_1 \cos \psi. \quad (8.75)$$

Из (8.68) следует, что

$$\sin \psi = \frac{\Delta x}{A}. \quad (8.76)$$

В то же время

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} = \Delta \dot{x} &= A\omega \cos \omega t = \\ &= A\omega \cos \psi. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Откуда

$$\cos \psi = \frac{\Delta \dot{x}}{A\omega}. \quad (8.78)$$

Подставив (8.76) и (8.78) в (8.75), получаем:

$$z \approx \frac{a_1}{A} \Delta x + \frac{b_1}{A\omega} \Delta \dot{x}. \quad (8.79)$$

В частном случае, когда гистерезис отсутствует, вместо выражения (8.68) можно записать:

$$z = f(\Delta x). \quad (8.80)$$

Тогда

$$z \approx \frac{a_1}{A} \Delta x. \quad (8.81)$$

Соотношения (8.79) и (8.81), связывающие сигналы на входе НЭ с сигналами на его выходе, линейны. Так как они справедливы при наличии гармонического сигнала на входе НЭ, то рассматриваемый метод называется «методом гармонической линеаризации».

**Комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента.** Пусть на вход линейного оператора, заданного выражением (8.79), подан входной сигнал

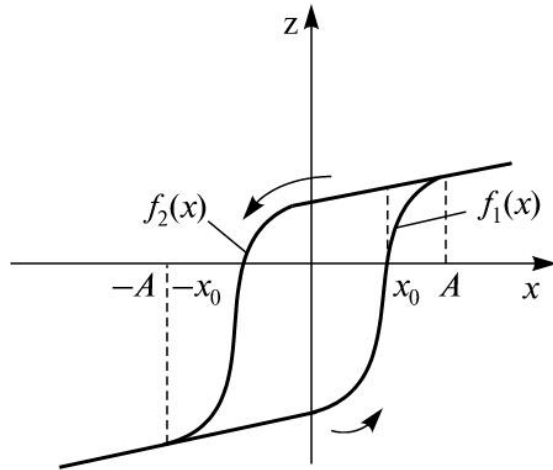


Рис. 8.20. Характеристика безынерционного нелинейного элемента с гистерезисом

$$\Delta x = Ae^{j\omega t}. \quad (8.82)$$

Тогда

$$\Delta \dot{x} = j\omega Ae^{j\omega t} \quad (8.83)$$

и после подстановки (8.82) и (8.83) в (8.79) получаем:

$$z \approx \frac{a_1 e^{j\omega t}}{A} + j \frac{b_1 e^{j\omega t}}{A} = \left( \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \right) e^{j\omega t}. \quad (8.84)$$

Переходя в (8.84) к показательной форме функции комплексного переменного, получаем:

$$z \approx \frac{1}{A} \left( \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right) e^{j \arctg \frac{b_1}{a_1}} e^{j\omega t}. \quad (8.85)$$

Обозначим

$$W_H(jA) = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{A} e^{j\lambda}, \quad (8.86)$$

где  $\lambda = \arctg \frac{b_1}{a_1}$ .

Это выражение называют комплексным коэффициентом передачи, или комплексным коэффициентом усиления нелинейного элемента по аналогии с  $W(j\omega)$  — частотной характеристикой, введенной ранее при рассмотрении линейных систем. Вместе с тем имеются существенные различия между этими характеристиками.

В случае линейных систем:  $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$  и амплитудная частотная характеристика  $A(\omega) = |K(j\omega)|$  зависит от частоты входного сигнала. При комплексном коэффициенте передачи безынерционного нелинейного элемента его модуль равен:

$$|W_H(jA)| = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{A}.$$

Следовательно, модуль комплексного коэффициента передачи безынерционной нелинейности зависит от амплитуды  $A$  гармонического входного сигнала и не зависит от частоты. Если рассматривать, в частности, соединение безынерционной нелинейности и линейного звена, не удовлетворяющего гипотезе фильтра, в качестве одного нелинейного оператора, то, как будет показано далее, комплексный коэффициент передачи будет зависеть от амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  входного сигнала. В общем случае можно записать:  $W_H(jA, \omega)$ . При рассмотрении безынерционных нелинейностей оставим обозначение  $W_H(jA)$ .

Комплексный коэффициент передачи, как следует из (8.84), может быть задан в алгебраической форме:

$$W_H(jA) = \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} = P_H(A) + jQ_H(A). \quad (8.87)$$

Инверсным комплексным коэффициентом передачи будем называть величину

$$\tilde{W}_H(jA) = -\frac{1}{W_H(jA)}.$$

С учетом показательной формы комплексного коэффициента передачи

$$\tilde{W}_H(jA) = -\frac{A}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{-j\lambda}.$$

При алгебраической форме записи инверсного комплексного коэффициента передачи

$$\tilde{W}_H(jA) = -\frac{1}{\frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A}} = -\frac{a_1 A}{a_1^2 + b_1^2} + j \frac{b_1 A}{a_1^2 + b_1^2}. \quad (8.88)$$

Для выяснения свойств комплексного коэффициента передачи получим его выражение при характеристике нелинейного элемента, приведенной на рис. 8.20. Здесь

$$z(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } \frac{dx}{dt} > 0; \\ f_2(x) & \text{при } \frac{dx}{dt} < 0. \end{cases} \quad (8.89)$$

Положив  $A > x_0$ , зададимся гармоническим сигналом  $A \sin \omega t$ . Тогда  $\frac{dx}{dt} = A \omega \cos \omega t$  и  $\frac{dx}{dt} > 0$  при  $0 < \psi = \omega t < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \psi < 2\pi$ ,  $\frac{dx}{dt} < 0$  при  $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}$ .

В соответствии с (8.72) при  $k = 1$  для заданной нелинейности (8.89) получаем:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_2(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f_1(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (8.90)$$

В соответствии с (8.73) при  $k = 1$  для заданной нелинейности (8.90) получаем:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_2(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f_1(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \quad (8.91)$$

Так как  $\cos \psi \, d\psi = d \sin \psi$ , и обозначив  $A \sin \psi = g$ , получаем:

$$b_1 = \frac{1}{\pi A} \int_0^A f_1(g) dg + \frac{1}{\pi A} \int_A^{-A} f_2(g) dg + \frac{1}{\pi A} \int_{-A}^0 f_1(g) dg = -\frac{1}{\pi A} S, \quad (8.92)$$

где  $S$  — площадь петли гистерезиса.

Комплексный коэффициент передачи для рассмотренного случая получается после подстановки (8.90) и (8.92) в (8.86). Угол сдвига фаз между первой гармоникой выходного сигнала и первой гармоникой входного сигнала в соответствии (8.86) имеет вид:

$$\lambda = \arctg \left( -\frac{S}{\pi A a_1} \right). \quad (8.93)$$

Из рассмотренного примера следуют важные выводы:

— при отсутствии гистерезиса у нелинейного элемента, т.е. при  $S = 0$ , угол сдвига фаз между первой гармоникой сигнала на выходе нелинейного элемента и гармоническим сигналом на его входе равен нулю;

— при отсутствии гистерезиса у нелинейного элемента  $b_1 = 0$  и комплексный коэффициент передачи, как следует из (8.86), является действительным числом, определяемым выражением

$$K_H(A) = \frac{a_1}{A}. \quad (8.94)$$

**Комплексный коэффициент передачи (усиления) различных нелинейных элементов.** Для получения комплексного коэффициента передачи для случая, охватывающего большое число типовых элементов, рассмотрим следующий пример.

Статическая характеристика релейного элемента приведена на рис. 8.21, а. Напряжение срабатывания реле равно  $\pm \Delta x_a$ ; напряжение отпускания  $\pm \Delta x_b$ ;  $\pm z_m$  — сигнал на выходе сработавшего реле. Изменяя величины  $\Delta x_a$  и  $\Delta x_b$ , получим множество статических характеристик, приведенных на рис. 8.21.

Различные соотношения величин  $\Delta x_a$  и  $\Delta x_b$  показаны в подрисунковой подписи. Если амплитуда  $A$  гармонического сигнала на входе нелинейного элемента меньше  $\Delta x_a$ , то сигнал на его выходе равен 0. Для нелинейного элемента, статическая характеристика которого при-

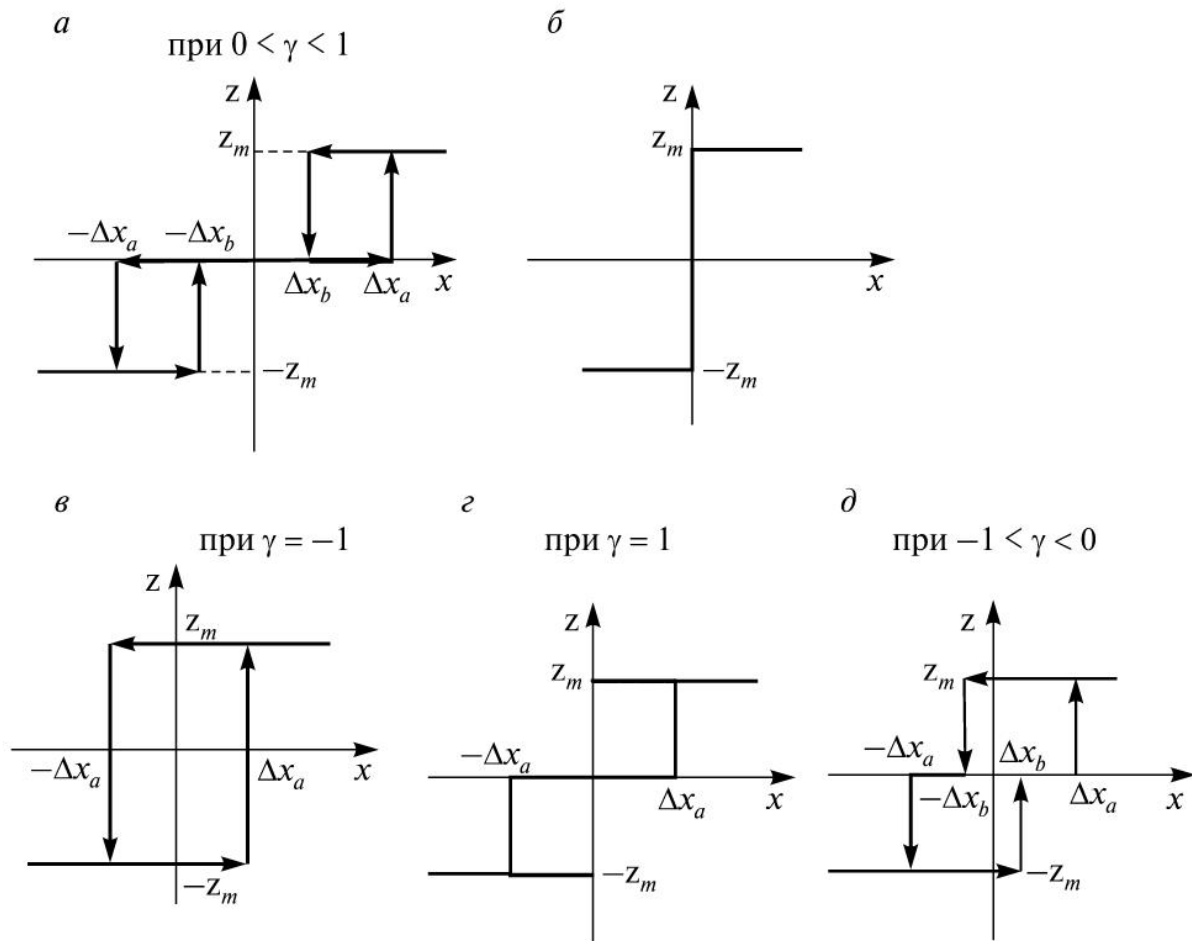


Рис. 8.21. Статические характеристики нелинейных элементов:  
а —  $\Delta x_a > 0$ ;  $\Delta x_b > 0$ ;  $\Delta x_a > \Delta x_b$ ; б —  $\Delta x_a = \Delta x_b = 0$ ; в —  $\Delta x_a > 0$ ;  $\Delta x_b > -\Delta x_a$ ; г —  $\Delta x_a = \Delta x_b > 0$ ;  
д —  $\Delta x_a > 0$ ;  $|\Delta x_a| > |\Delta x_b|$ ;  $\Delta x_b > 0$

ведена на рис. 8.21, а, при  $A > x_b$  сигнал  $z(\omega t)$  на выходе НЭ построен на рис. 8.22, при  $dx/dt < 0$  напряжение отпускания реле равно  $-\Delta x_b$ ; при  $dx/dt > 0$  напряжение отпускания реле равно  $\Delta x_b$

Определим коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ . Очевидно, что постоянная составляющая сигнала на выходе НЭ равна 0, т.е.  $a_0 = 0$ . Координата  $\omega t_a$  срабатывания реле определяется из уравнения

$$A \sin \omega t_a = \Delta x_a \quad \text{и} \quad \sin \omega t_a = \frac{\Delta x_a}{A}. \quad (8.95)$$

Координата отпускания реле определяется из уравнения

$$A \sin(\pi - \omega t_b) = \Delta x_b$$

и

$$\sin(\pi - \omega t_b) = \frac{\Delta x_b}{A}. \quad (8.96)$$

Учитывая, что статическая характеристика НЭ нечетная функция, в соответствии с (8.73) получаем:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega t_a}^{\omega t_b} z_m \sin \omega t \, d(\omega t) = \\ &= \frac{2z_m}{\pi} [\cos \omega t_a - \cos \omega t_b]. \end{aligned} \quad (8.97)$$

С учетом (8.95) и (8.96)

$$\cos \omega t_a = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_a} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x_a}{A}\right)^2};$$

$$\begin{aligned} \cos \omega t_b &= -\sqrt{1 - \sin^2(\pi - \omega t_b)} = \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x_b}{A}\right)^2}. \end{aligned}$$

Откуда

$$a_1 = \frac{2z_m}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x_a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x_b}{A}\right)^2} \right]. \quad (8.98)$$

Коэффициент  $b_1$  определяется непосредственно по формуле (8.92):

$$b_1 = -\frac{2}{A\pi} z_m (\Delta x_a - \Delta x_b). \quad (8.99)$$

Подставив  $a_1$  и  $b_1$  в (8.87), получаем комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента в алгебраической форме:

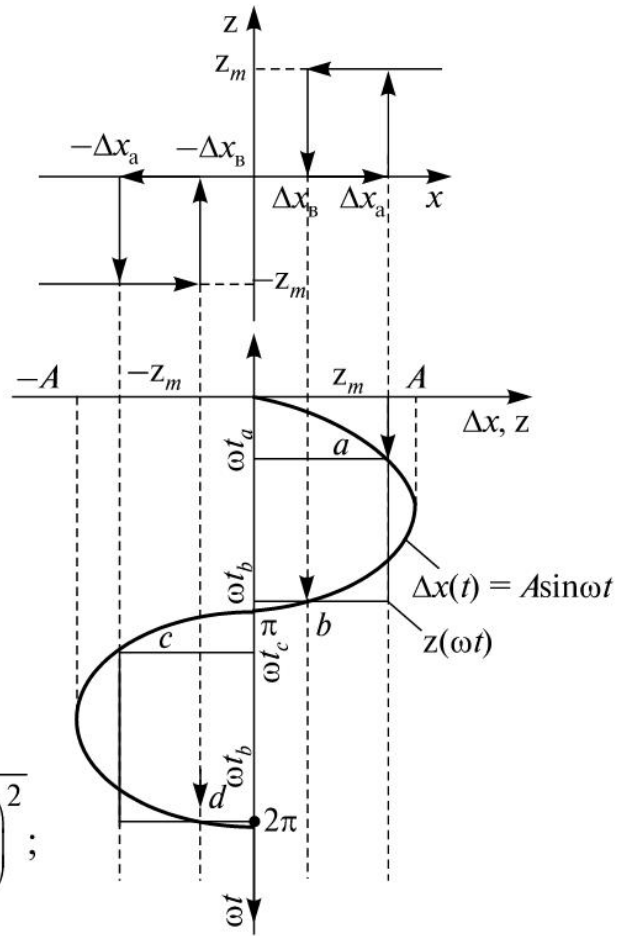


Рис. 8.22. Построение сигнала на выходе НЭ при гармоническом сигнале на его входе



$$W_H(jA) = \frac{2z_m}{A\pi} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_a}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_b}{A} \right)^2} \right] - j \frac{2}{A^2 \pi} z_m (\Delta x_a - \Delta x_b). \quad (8.100)$$

На рис. 8.23 представлены зависимости действительной и мнимой частей

$$P_H(A) = \frac{2z_m}{A\pi} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_a}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_b}{A} \right)^2} \right], \quad (8.101)$$

$$Q_H(A) = \frac{-2}{A^2 \pi} z_m (\Delta x_a - \Delta x_b) \quad (8.102)$$

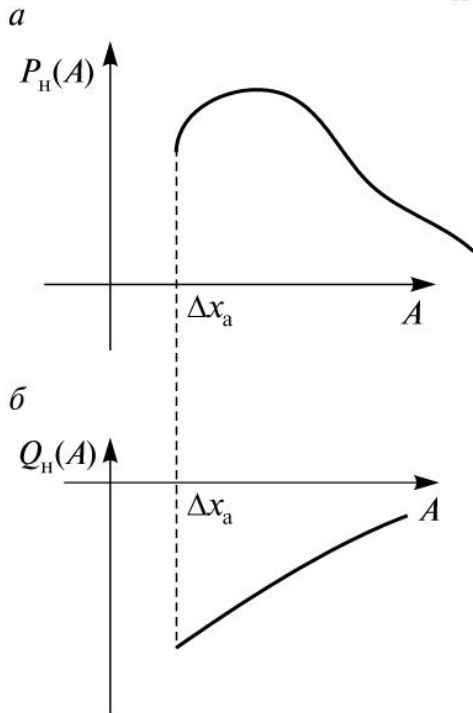


Рис. 8.23. Зависимость действительной (а) и мнимой (б) частей комплексного коэффициента усиления от амплитуды входного сигнала (для нелинейного элемента, статическая характеристика которого приведена на рис. 8.21, а)

комплексного коэффициента передачи от  $A$  — амплитуды входного сигнала.  $P_H(A)$  и  $Q_H(A)$  равны 0 при  $A < \Delta x_a$  и имеют разрыв в точке  $A = \Delta x_a$ , что соответствует отсутствию сигнала на выходе нелинейного элемента при  $A < \Delta x_a$  и появлению импульса конечной длительности при  $A \geq \Delta x_a$ . Если в выражениях (8.100), (8.101) и (8.102) положить  $\Delta x_a = \Delta x_b$ , то получим комплексный коэффициент передачи, его действительную и мнимую части для безгистерезисного реле с характеристикой, приведенной на рис. 8.21, з. Очевидно, что в этом случае мнимая часть комплексного коэффициента передачи равна нулю, а

$$W_H(A) = P_H(A) = \frac{4z_m}{A\pi} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_a}{A} \right)^2}. \quad (8.103)$$

Зависимость  $W_H(A) = P_H(A)$  для этого случая приведена на рис. 8.24, а.

Если в выражении (8.104) положить  $\Delta x_a = 0$ , то получим

$$W_H(A) = P_H(A) = \frac{4z_m}{A\pi} \quad (8.104)$$

для идеального реле — нелинейного элемента, статическая характеристика которого приведена на рис. 8.24, б. Очевидно, что для этого элемента, как не имеющего гистерезиса,  $Q_H(A) = 0$ . График зависимости  $W_H(A)$  приведен на рис. 8.24, б.

Удобно представить  $W_H(A)$  в нормированной форме. Введем обозначения:

$$\gamma = \frac{\Delta x_b}{\Delta x_a} \text{ — коэффициент возврата}$$

реле; при изменении величины  $\gamma$  в диапазоне  $-1 \leq \gamma \leq 1$  возможно описание нелинейных элементов, статические характеристики которых приведены на рис. 8.20, а, в, г, д;

$$A_* = \frac{A}{\Delta x_a} \text{ — безразмерная амплитуда;}$$

так как движение системы имеет место при  $A \geq \Delta x_a$ , то  $A_* \geq 1$ ;

$$N = \frac{z_m}{\Delta x_a} \text{ — нормирующий множитель.}$$

Значения коэффициента возврата  $\gamma$  и его соответствия статическим характеристикам НЭ приведены на рис. 8.21.

При этих обозначениях для идеального реле — нелинейного элемента, статическая характеристика которого приведена на рис. 8.21, б, имеются особенности, так  $\Delta x_a = \Delta x_b = 0$ . В случае идеального реле откажемся от относительных величин и будем рассматривать выражение (8.104).

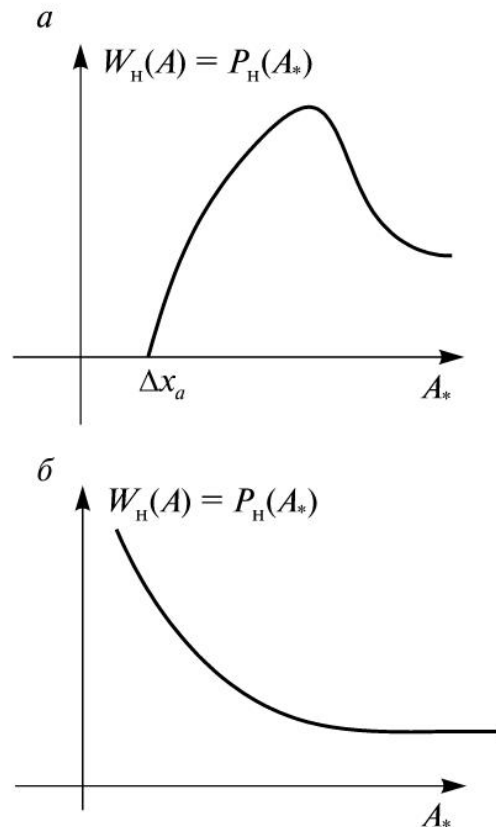


Рис. 8.24. Зависимости комплексного коэффициента усиления от амплитуды входного сигнала для нелинейных элементов, статические характеристики которых приведены а — на рис. 8.21, г; б — на рис. 8.21, б

После соответствующих подстановок и несложных алгебраических преобразований выражения (8.100) получаем:

$$W_{\text{н}}(jA) = NW_{\text{нн}}(jA_*),$$

где

$$W_{\text{нн}}(jA_*) = \frac{2}{\pi A_*^2} \left[ \sqrt{A_*^2 - 1} + \sqrt{A_*^2 - \gamma^2} - j(1 - \gamma) \right] \quad (8.105)$$

является нормированным комплексным коэффициентом передачи нелинейного элемента. В частности [35], при  $A_* = 1$

$$W_{\text{нн}}(j1) = \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \gamma^2} - j(1 - \gamma) \right].$$

Откуда

$$P_{\text{нн}}(A_* = 1) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \gamma^2};$$

$$Q_{\text{нн}}(A_* = 1) = -\frac{2}{\pi} (1 - \gamma).$$

Из полученных выражений следует, что

$$P_{\text{нн}}^2(1) + Q_{\text{нн}}^2(1) = -\frac{4}{\pi} Q_{\text{нн}}(1)$$

$$\text{или} \quad P_{\text{нн}}^2(1) + \left[ Q_{\text{нн}}(1) + \frac{2}{\pi} \right]^2 = \left( \frac{2}{\pi} \right)^2.$$

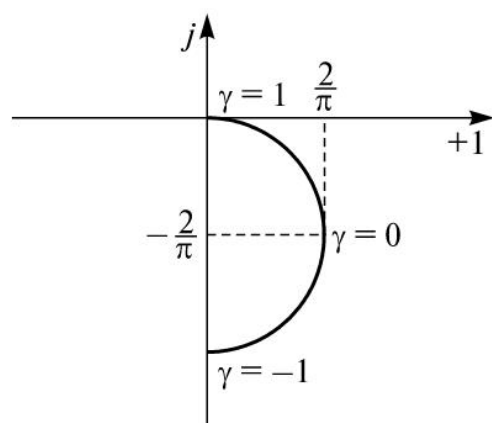


Рис. 8.25. Годограф нормированного комплексного коэффициента усиления при  $A_* = 1$  и  $0 \leq \gamma \leq 1$

Следовательно, геометрическое место точек годографа вектора  $W_{\text{нн}}(A_* = 1)$  при изменении коэффициента возврата  $-1 \leq \gamma \leq 1$  является полуокружностью, проходящей при  $\gamma = 1$  через начало координат с центром в точке

$\left( 0, -j \frac{2}{\pi} \right)$  (рис. 8.25). Инверсный комплексный коэффициент передачи оп-

ределяется выражением (8.88). После подстановки в (8.88) выражений (8.98) и (8.99) с учетом введенных выше переменных получим:

$$\tilde{W}_H(jA_*) = -\frac{1}{N} \frac{\pi A_*^2}{4} \frac{\left( \sqrt{A_*^2 - 1} + \sqrt{A_*^2 - \gamma^2} \right) + j(1 - \gamma)}{A_*^2 - \gamma^2 + \sqrt{(A_*^2 - 1)(A_*^2 - \gamma^2)}}. \quad (8.106)$$

В частности, при  $A_* = 1$

$$\tilde{W}_H(j1) = -\frac{\pi}{4N} \frac{\sqrt{1 - \gamma^2} + j(1 - \gamma)}{1 - \gamma} = -\frac{\pi}{4N} \left[ \sqrt{\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}} + j \right]. \quad (8.107)$$

На рис. 8.26 приведен годограф вектора инверсного нормированного комплексного коэффициента передачи  $\tilde{W}_{HH}(jA_*)$  при  $A_* = 1$  и изменении коэффициента возврата от  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Стрелками указано направление увеличения  $\gamma$ .

Получение выражений комплексных коэффициентов передачи для ряда нелинейностей является иллюстрацией методики, которую следует использовать и при других зависимостях  $z(\Delta x)$ . В табл. 8.1, построенной по материалам [10, 28, 35], сведены выражения комплексных коэффициентов передачи для различных статических характеристик нелинейных элементов.

**Симметричные автоколебания в нелинейных системах.** Для нелинейной системы (см. рис. 8.20) условия гармонического баланса, при которых существуют автоколебания, определяются выражениями (8.65), (8.66). После введения понятия комплексного коэффициента усиления эти условия можно записать в виде

$$W_L(j\omega)W_H(jA) = -1, \quad (8.108)$$

где  $W_L(j\omega)$  — ЧХ линейной части системы;  
 $W_H(jA)$  — комплексный коэффициент передачи нелинейной части системы.

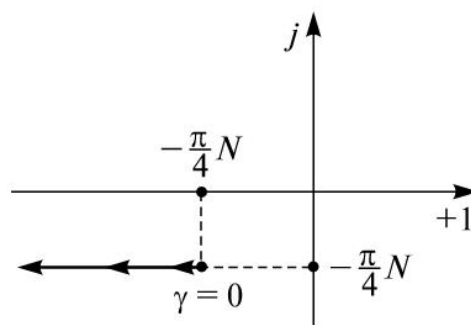
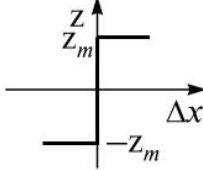
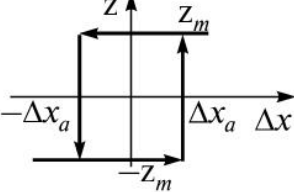
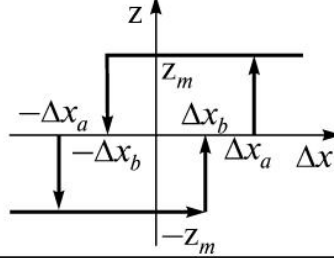
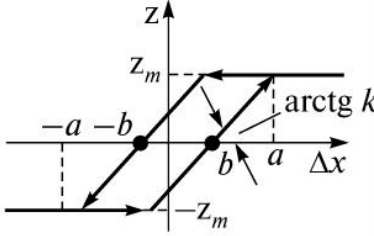
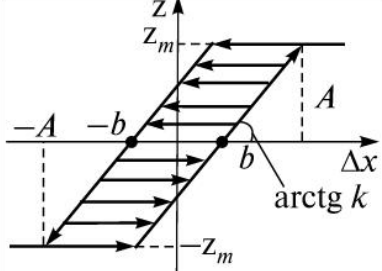


Рис. 8.26. Годограф вектора инверсного нормированного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента, статическая характеристика которого приведена на рис. 8.24, а при  $A_* = 1$

Таблица 8.1

## Комплексные коэффициенты передачи для некоторых нелинейностей

Номер хар-ки	Статическая характеристика	$W_H(jA) = P_H(A) + jQ_H(A)$
1	2	3
1		$P_H(A) = \frac{2k}{\pi} (\psi_2 - \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1),$ $A > b_2, \psi_1 = \arcsin \frac{b_1}{A}; \psi_2 = \arcsin \frac{b_2}{A} =$ $= \arcsin \frac{c + b_1 k}{Ak};$ $Q_H(A) = 0$
2		$P_H(A) = \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{z_m}{Ak} + \frac{z_m}{Ak} \sqrt{1 - \frac{z_m^2}{A^2 k^2}} \right],$ $A > b_2 = \frac{z_m}{k};$ $Q_H(A) = 0$
3		$P_H(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right],$ $A > b_1,$ $Q_H(A) = 0$
4		$P_H(A) = k_2 - \frac{2}{\pi} (k_2 - k_1) \left[ \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right],$ $A > b_1,$ $Q_H(A) = 0$
5		$P_H(A) = \frac{2z_m}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_a}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_b}{A} \right)^2} \right]$ $A \geq \Delta x_a,$ $Q_H(A) = -\frac{2z_m}{\pi A^2} (\Delta x_a - \Delta x_b)$
6		$P_H(A) = \frac{4z_m}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta x_a}{A} \right)^2} \right],$ $A \geq \Delta x_a,$ $Q_H(A) = 0$

1	2	3
7		$P_H(A) = \frac{4Z_m}{\pi A},$ $Q_H(A) = 0, A \geq 0$
8		$P_H(A) = \frac{4Z_m}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x_a}{A}\right)^2},$ $Q_H(A) = -\frac{4Z_m \Delta x_a}{\pi A^2}, A \geq \Delta x_a$
9		$P_H(A) = \frac{2Z_m}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x_a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x_b}{A}\right)^2} \right];$ $Q_H(A) = -\frac{2Z_m}{\pi A^2} (\Delta x_a - \Delta x_b),$ $A \geq \Delta x_a; \Delta x_a > 0;  \Delta x_a  >  \Delta x_b $
10		$P_H(A) = \frac{k}{\pi} \left[ \psi_2 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right];$ $Q_H(A) = -\frac{k}{\pi} (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1),$ $\psi_1 = \arcsin \frac{a}{A} = \frac{Z_m + bk}{Ak}; A > a$ $\psi_2 = \arcsin \frac{b}{A} = \frac{Z_m - bk}{Ak}$
11		$P_H(A) = \frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right];$ $Q_H(A) = -\frac{4kb}{\pi A} \left( 1 - \frac{b}{A} \right),$ $\psi_1 = \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{A} \right), A > b$

Воспользовавшись понятием инверсного коэффициента передачи, получаем:

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{н}}(jA)} = \tilde{W}_{\text{н}}(jA). \quad (8.109)$$

Будем, как и ранее, рассматривать случай отсутствия постоянной составляющей на выходе нелинейного элемента. При этом постоян-

ная составляющая так же отсутствует на выходе линейной части системы и автоколебания, если они имеют место, будут симметричны относительно оси времени. Условие (8.109) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных  $A$  — амплитуды и  $\omega$  — частоты автоколебаний. Если представить  $W_{\text{л}}(j\omega)$  и  $\tilde{W}_{\text{н}}(jA)$  в алгебраической форме:

$$W_{\text{л}}(j\omega) = P_{\text{л}}(\omega) + jQ_{\text{л}}(\omega);$$

$$\tilde{W}_{\text{н}}(jA) = -\frac{a_1 A}{a_1^2 + b_1^2} + j\frac{b_1 A}{a_1^2 + b_1^2},$$

то уравнение (8.109) распадается на два:

$$P_{\text{л}}(\omega) = -\frac{a_1 A}{a_1^2 + b_1^2}; \quad (8.110)$$

$$Q_{\text{л}}(\omega) = \frac{b_1 A}{a_1^2 + b_1^2}. \quad (8.111)$$

Если автоколебания в системе возможны, то корни этих уравнений являются действительными числами, определяющими частоту и амплитуду этих автоколебаний.

Вместе с тем остались нерешенными следующие вопросы:

- как решать систему уравнений (8.110), (8.111)?
- если в системе возможны автоколебания, то будут ли они устойчивы?

Рассмотрим последовательно ответы на поставленные вопросы.

Существуют различные способы решения системы уравнений (8.110), (8.111) [28]. Следуя [35], приведем рекомендуемый Л.С. Гольдфарбом графический способ решения. На рис. 8.27 приведены различные графики  $W_{\text{л}}(j\omega)$  и  $\tilde{W}_{\text{н}}(jA)$ . На кривых  $\tilde{W}_{\text{н}}(jA)$  стрелками показано направление увеличения амплитуды  $A$ . На графиках  $W_{\text{л}}(j\omega)$  стрелками указано направление изменения частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$ , нанесена штриховка таким образом, чтобы область со штриховкой была слева при движении от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$ .

Случаи, приведенные на рис. 8.27, а, в, г, д, е, свидетельствуют о наличии решения системы уравнений. При взаимном расположении

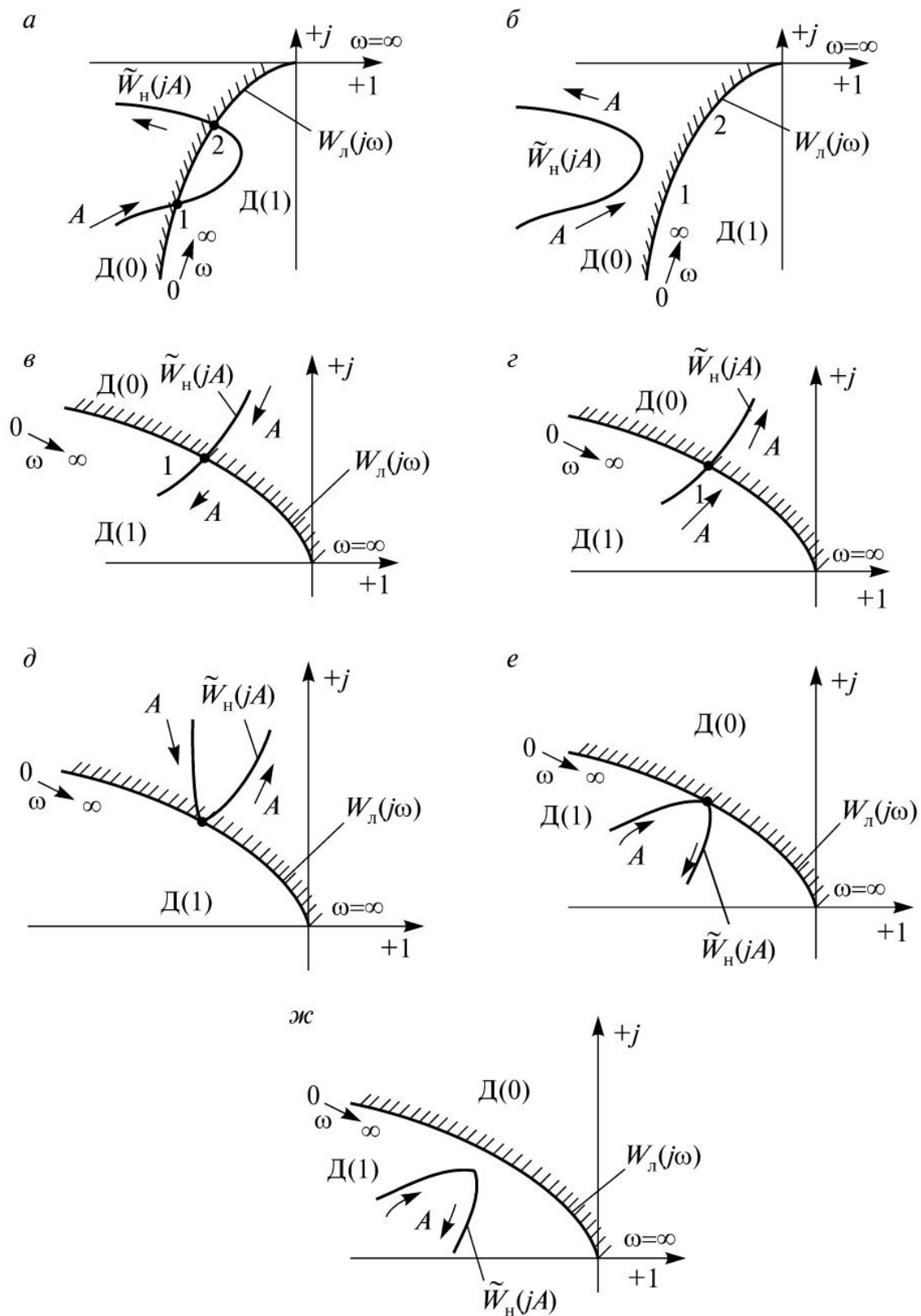


Рис. 8.27. Графический способ решения уравнений гармонического баланса и анализ устойчивости автоколебаний



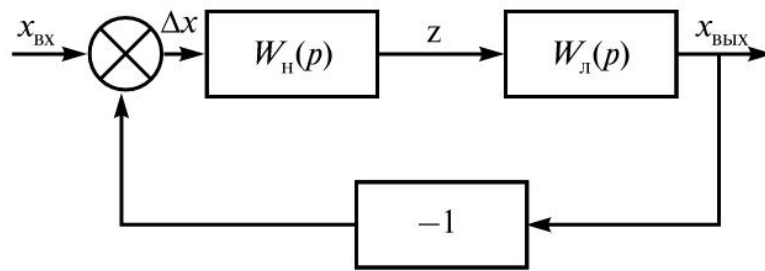


Рис. 8.28. Структурная схема линейной системы

$W_{\text{л}}(j\omega)$  и  $\tilde{W}_{\text{н}}(jA)$ , показанном на рис. 8.27, б, ж, отсутствует решение системы уравнений.

При известных координатах точек пересечения (или касания) кривых  $W_{\text{л}}(j\omega)$  и  $\tilde{W}_{\text{н}}(jA)$  определяются величины  $A$  и  $\omega$ .

Ответ на второй вопрос об устойчивости автоколебаний требует дополнительных рассмотрений и введение понятия  $D$  — разбиения по параметру.

Передаточная функция системы, приведенной на рис. 8.28, определяется выражением

$$W(p) = \frac{W_{\text{н}}(p)W_{\text{л}}(p)}{1 + W_{\text{н}}(p)W_{\text{л}}(p)}.$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$N(p) = 1 + W_{\text{н}}(p)W_{\text{л}}(p) = 0.$$

Как уже было показано (см. п. 8.7), система устойчива, если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Каждому корню  $\alpha + j\omega$  соответствует комплексно-сопряженный корень  $\alpha - j\omega$ . Если корень находится на мнимой оси  $p_{1,2} = \pm j\omega$ , то в линейной системе имеются гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Если хотя бы один корень характеристического уравнения находится в правой полуплоскости, то система неустойчива. При изменении параметров системы изменяются коэффициенты многочлена  $N(p)$  и, следовательно, положение корней этого многочлена на комплексной плоскости. Необходимо выяснить влияние передаточной функции  $W_{\text{н}}(p)$  на устойчивость этой системы. При изменении комплексного параметра  $W_{\text{н}}(p)$  корни характеристического уравнения могут пересекать мнимую ось, являющуюся границей между

левой и правой полуплоскостью. При пересечении «границы» корень характеристического уравнения становится мнимым  $p = j\omega$  и  $1 + W_H(p)W_L(j\omega) = 0$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ .

Откуда

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_H(j\omega)}.$$

Обозначив

$$-\frac{1}{W_H(j\omega)} = X + jY,$$

получим:

$$W_L(j\omega) = X + jY.$$

Итак,  $X + jY$  на комплексной плоскости определяет границу, пересечение которой соответствует изменению знака действительной части корня характеристического уравнения системы. Область таких параметров системы, при значении которых  $m$  корней характеристического уравнения системы находятся в правой полуплоскости, будем называть областью  $D(m)$ . Очевидно, что  $m \leq n$ , где  $n$  — порядок системы. Система устойчива, когда все ее корни характеристического уравнения лежат в области  $D(0)$ . На рис. 8.29, *a* показана  $W_L(p) = X + jY$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , и от  $-\infty$  до 0. При увеличении частоты нанесем штриховку слева по ходу кри-

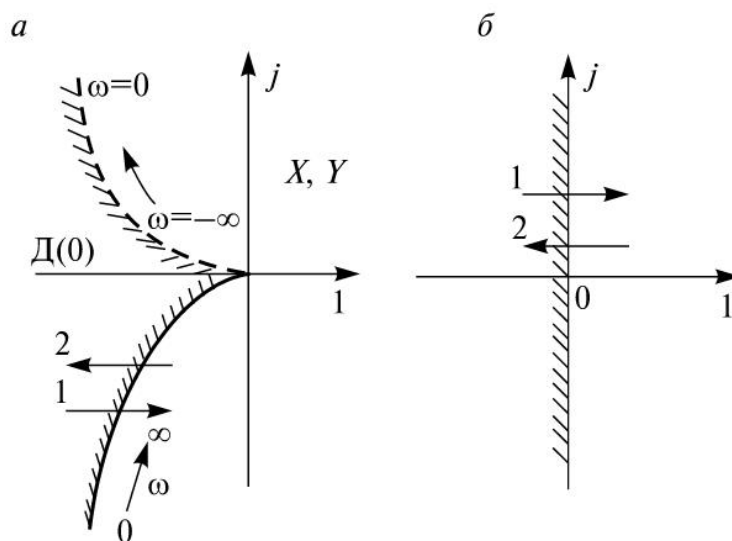


Рис. 8.29. Д-разбиение по одному параметру:  
*a* — в плоскости  $X, Y$ ; *б* — в плоскости корней  $p$

вой. Функция  $W_{\text{д}}(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  (она показана сплошными линиями) является комплексно-сопряженной  $W_{\text{д}}(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $-\infty$ .

Если в плоскости  $X, Y$  (см. рис. 8.29, *а*) изменять параметр системы таким образом, чтобы граница Д-разбиений пересекалась против направления штриховки (стрелка 1), то в плоскости корней  $p$  (см. рис. 8.29, *б*) корень характеристического уравнения переходит из левой полуплоскости в правую (см. стрелку 1). Если границу Д-разбиений пересекать по направлению к штриховке (стрелка 2, рис. 8.29, *а*), то корень характеристического уравнения переходит из правой полуплоскости в левую (стрелка 2, рис. 8.29, *б*). Рассмотренная процедура определяет факт перехода корня из одной полуплоскости в другую. Пусть, например, из отдельно проведенного анализа известно, что все корни характеристического уравнения системы при некоторых фиксированных параметрах (область  $D(0)$ ) находятся в левой полуплоскости. Тогда изменение параметров в направлении, указанном стрелкой 1 (см. рис. 8.29, *а*) переводит систему в область  $D(1)$  и система становится неустойчивой.

После проведенных рассмотрений вернемся опять к вопросу об устойчивости автоколебаний. Система, приведенная на рис. 8.28, с  $W_{\text{н}}(p)$  на  $W_{\text{н}}(jA)$  нелинейного элемента после его гармонической линеаризации допускает использование аппарата Д-разбиений. Точка 1 на рис. 8.27, *а* соответствует неустойчивым автоколебаниям. Так как при случайном увеличении амплитуды  $A$  в точке 1 пересекаются граница области Д-разбиений против направления штриховки, то один из корней характеристического уравнения переходит в правую полуплоскость. При этом с изменением времени опять увеличивается амплитуда автоколебаний и т.д. Точка 2 (см. рис. 8.27, *а*), наоборот, соответствует устойчивым автоколебаниям. Случайное увеличение амплитуды  $A$  приводит к переходу корня характеристического уравнения в левую полуплоскость. При этом с течением времени амплитуда автоколебаний уменьшается и режим возвращается к точке 2. При случайном уменьшении амплитуды  $A$  корень характеристического уравнения системы переходит в правую полуплоскость, амплитуда колебаний увеличивается и режим системы опять возвращается в точку 2. Следовательно, режим автоколебаний с частотой и амплитудой, соответствующими точке 2, является устойчивым.

На рис. 8.27 *в* в точке 1 отсутствует режим устойчивых автоколебаний. Здесь случайное увеличение амплитуды  $A$  приводит в коле-

бательному процессу с увеличивающейся амплитудой. Случайное уменьшение амплитуды  $A$  приводит к дальнейшему уменьшению амплитуды и прекращению колебаний. На рис. 8.27, *г* точка 1 соответствует режиму устойчивых автоколебаний. Действительно при случайном увеличении амплитуды  $A$  пересекается граница Д-разбиений в направлении, соответствующему переходу корня характеристического уравнения системы в левую полуплоскость. При этом амплитуда колебаний уменьшается и происходит возвращение в точку 1. При случайном уменьшении амплитуды  $A$  пересекается граница Д-разбиений в направлении, соответствующем переходу корня из левой в правую полуплоскость. Последнее приводит к росту амплитуды колебаний  $A$  и возврату режима в точку 1.

На рис. 8.27, *д* и 8.27, *е* рассмотрены случаи неустойчивых автоколебаний. На рис. 8.27, *б* и 8.27, *ж* показаны примеры, соответствующие устойчивым системам. В этих случаях отсутствуют автоколебания. Приведенные случаи позволяют сформулировать общее правило анализа устойчивости автоколебаний в нелинейной системе после гармонической линеаризации нелинейности: автоколебания устойчивы, если, двигаясь по характеристике  $\tilde{W}_H(jA)$  в сторону возрастания амплитуды  $A$  переходим из неустойчивой в устойчивую область Д-разбиений; автоколебания неустойчивы, если, двигаясь по его характеристике  $\tilde{W}_H(jA)$  в сторону возрастания амплитуды  $A$ , переходим из устойчивой в неустойчивую область Д-разбиений.

**Несимметричные автоколебания в нелинейных системах.** В том случае, когда выполняется условие (8.71) на выходе нелинейного элемента при гармоническом сигнале на его входе и равенстве нулю сигнала  $x_{\text{вх}}$  на входе системы, отсутствует постоянная составляющая. Следовательно, сигнал на выходе линейной части системы в этом случае не содержит постоянной составляющей, и сигнал первой гармоники на выходе линейной части определяет симметричные относительно оси времени автоколебания. Если условие (8.71) не выполняется, то на выходе нелинейного элемента при наличии на его входе гармонического сигнала имеется постоянная составляющая. Тогда на выходе линейной части системы также имеется постоянная составляющая. Тот же эффект имеет место при выполнении условия (8.71), когда  $x_{\text{вх}} = \text{const} = x_{\text{вх}0} \neq 0$ . По существу постоянный ненулевой входной сигнал смещает статическую характеристику нелиней-

ного элемента. Наличие постоянной составляющей сигнала на выходе системы делает сигнал на ее выходе несимметричным относительно времени. Такие автоколебания называют несимметричными относительно времени.

Пусть на вход нелинейного элемента поступает сумма двух сигналов постоянной составляющей  $\Delta x_0$  и гармонического сигнала:

$$\Delta x = \Delta x_0 + A \sin \omega t,$$

тогда сигнал на выходе нелинейного элемента также имеет постоянную составляющую. Если гипотеза фильтра выполняется, то, пренебрегая высшими гармониками, представим сигнал на выходе нелинейного элемента:

$$z(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t, \quad (8.112)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\Delta x_0 + A \sin \psi, A \omega \cos \psi) d\psi; \quad (8.113)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\Delta x_0 + A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \sin \psi d\psi; \quad (8.114)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\Delta x_0 + A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (8.115)$$

Используя введенный выше при гармонической линеаризации комплексный коэффициент передачи, нелинейный элемент можно представить двумя звеньями: одним — для гармонической составляющей с комплексным коэффициентом усиления в общем случае, определяемым выражением (8.86) или (8.87), и вторым — для постоянной составляющей с коэффициентом передачи

$$W_0(\Delta x_0, A) = \frac{a_0}{\Delta x_0}. \quad (8.116)$$

В соответствии с (8.113), (8.114) и (8.115) оба коэффициента зависят от амплитуды  $A$  гармонического сигнала и  $\Delta x_0$ . В случае отсутствия гистерезиса комплексный коэффициент передачи, как было показано ранее, имеет мнимую часть, равную нулю.

Уравнение гармонического баланса имеет вид:  
для *постоянной* составляющей

$$\Delta x_0 = x_{\text{вх}0} - W_0(\Delta x_0, A)W_{\text{л}}(0), \quad (8.117)$$

где  $x_{\text{вх}0}$  — постоянный сигнал на входе системы;

для *гармонической* составляющей (см. 8.108)

$$W_{\text{л}}(j)W_{\text{н}}(jA, \Delta x_0) = -1. \quad (8.118)$$

Для определения амплитуды и частоты автоколебаний, а также величины постоянной составляющей требуется решение системы уравнений (8.117) и (8.118). Еще раз подчеркнем, что в выражении  $W_{\text{н}}(jA, \Delta x_0)$  коэффициенты  $a_1$  и  $b_1$  определяются по формулам (8.114) и (8.115) и, следовательно, зависят от  $\Delta x_0$ .

Следуя [1], рассмотрим графический способ решения. Вначале для различных  $A$  по формуле (8.113) строят зависимости  $a_0(\Delta x_0, A)$ . На этом же графике (см. рис. 8.30, а) в соответствии с уравнением (8.117) строят прямую линию

$$a_0 = \frac{x_{\text{вх}0} - \Delta x_0}{W_{\text{л}}(0)}. \quad (8.119)$$

По точкам пересечения этой прямой с семейством кривых  $a_0(\Delta x_0, A)$  для различных  $A$  получают (см. рис. 8.30, б) зависимость  $\Delta x_0(A)$ . Далее по формуле (8.88), где  $a_1$  и  $b_1$  вычисляются в соответствии с (8.114) и (8.115) для различных  $\Delta x_0$ , строят (см. рис. 8.30, в) семейство кривых  $\tilde{W}_{\text{н}}(jA, \Delta x_0)$ . В случае однозначной нелинейности, когда гистерезис отсутствует и, следовательно,  $b_1 = 0$ , удобней строить зависимость  $\tilde{W}_{\text{н}}(\Delta x_0, A)$  (см. рис. 8.30, г).

Рассмотрим вначале случай нелинейностей с гистерезисом. На графике, приведенном на рис. 8.30, в, строим зависимость  $W_{\text{л}}(j\omega)$ . В точках пересечения  $\tilde{W}_{\text{н}}(\Delta x_0, jA)$  и  $W_{\text{л}}(j\omega)$  находим соответствующие амплитуды автоколебаний  $A_{a1}(\Delta x_0^{(1)})$ ,  $A_{a2}(\Delta x_0^{(2)})$ ,  $A_{a3}(\Delta x_0^{(3)})$ ,  $A_{a4}(\Delta x_0^{(4)})$ .



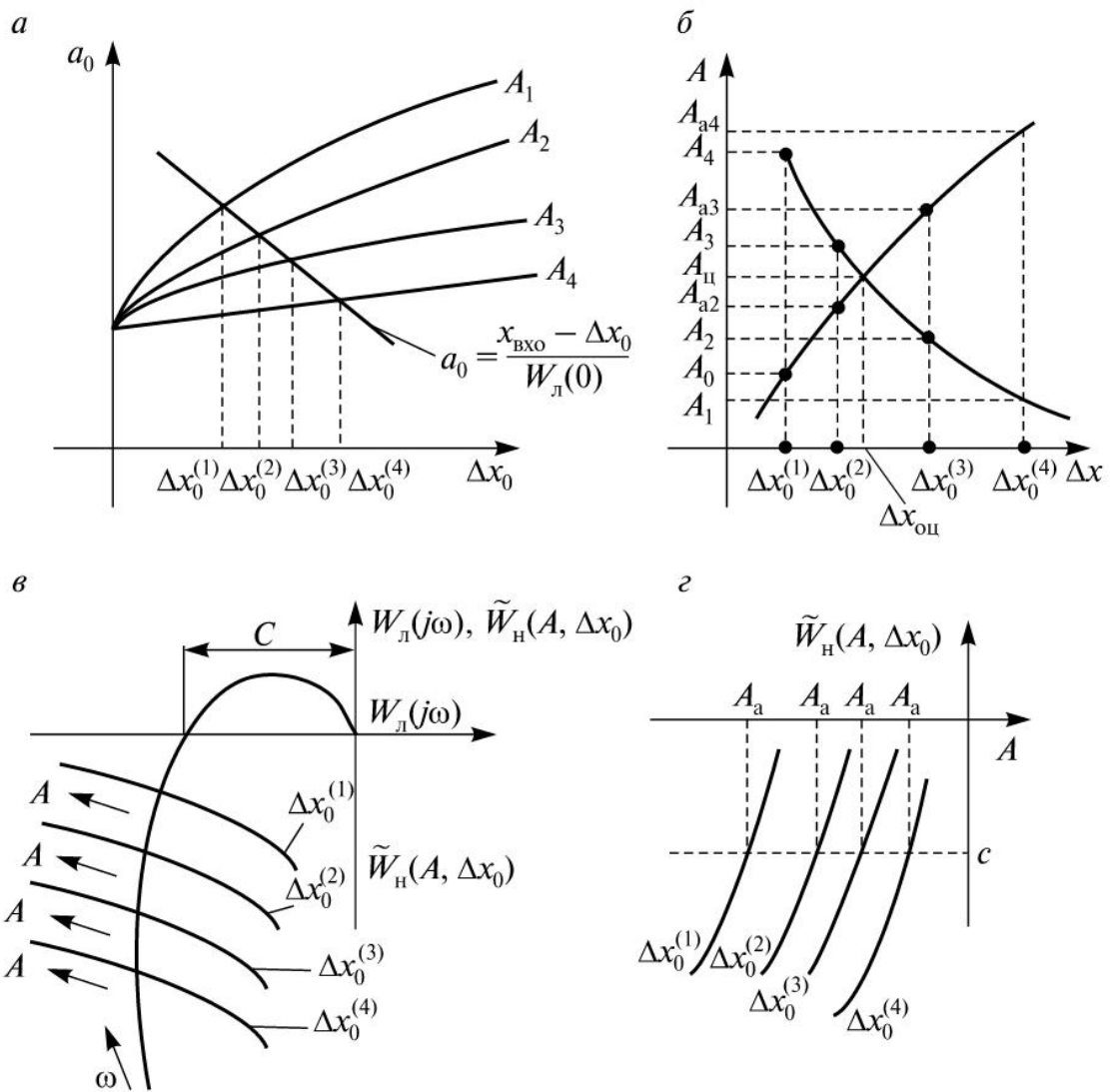


Рис. 8.30. Графический способ решения уравнений гармонического баланса при несимметричных колебаниях

По этим точкам на графике, приведенном на рис. 8.30, б, строим зависимость  $A_a(\Delta x)$ . В точке пересечений кривых  $A_a(\Delta x_0)$  и  $A(\Delta x_0)$  находим амплитуду  $A_{\text{ц}}$  и постоянную составляющую автоколебаний  $\Delta x_{\text{оц}}$ .

При безгистерезисной нелинейности инверсный коэффициент передачи — действительное число, его годограф совпадает с отрицательной полуосью абсцисс при различных  $\Delta x_0$ .

Отсюда точка пересечений  $W_{\text{л}}(j\omega)$  с годографом  $\tilde{W}_{\text{н}}(A, \Delta x_0)$  имеет координату по оси абсцисс, равную  $-c$ ; по оси ординат, равную 0 (см. рис. 8.30, в). Проведя прямую, параллельную оси абсцисс, при ординате равной  $-c$ , на рис. 8.30, г, получим зависимость  $A_a(\Delta x_a)$ . Далее задача решается аналогично предыдущему случаю. После на-

хождения амплитуды, частоты и постоянной составляющей автоколебаний их устойчивость определяют так же, как в случае симметричных колебаний.

**Развитие метода гармонической линеаризации.** Бурное развитие метода гармонической линеаризации пришлось на 50-е годы прошлого века. Этот метод вначале использовали для исследования режимов автоколебаний систем автоматического управления при нулевом или постоянном сигнале. В дальнейшем рассматривали решение задач прохождения медленно изменяющихся сигналов в автоколебательных системах, проводился анализ динамики таких систем при входных сигналах, изменение которых за период автоколебаний существенно, рассматривались способы учета высших гармоник автоколебаний. Параллельно разрабатывали процедуры гармонической линеаризации для систем с несколькими нелинейностями.

Наиболее полно приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем изложены в монографии Е.П. Попова и М.П. Пальтова [28].

В объеме данной книги авторы ограничились центральными вопросами метода гармонической линеаризации — анализа устойчивости нелинейных систем, определения условий устойчивости режима автоколебаний при постоянном или нулевом сигнале на входе системы.

Дополнительно приведем примеры, позволяющие иллюстрировать метод гармонической линеаризации в системах с двумя нелинейностями [10, 35].

### **Пример 8.3**

Структурная схема системы автоматического управления с двумя нелинейностями приведена на рис. 8.31.

Требуется провести гармоническую линеаризацию системы и записать уравнение гармонического баланса.

Пусть линейная часть системы с передаточной функцией  $W_d(p)$  может удовлетворять гипотезе фильтра.

Представим часть системы между точками  $a$  и  $d$  как одно нелинейное звено. Для гармонической линеаризации этого звена определим сигнал  $x_2(t)$  на его выходе при сигнале на его входе  $x_1(t) = A \sin \omega t$ . Сигнал  $x_1^*(t)$  на выходе идеального реле НЭ1 при гармоническом входном сигнале является последовательностью разнополярных прямоугольных импульсов с амплитудой  $c$  (рис. 8.32). Сигнал  $x_2(t)$  на выходе интегратора (звено с передаточной функцией  $1/p$ ) является линейной функцией времени (см. рис. 8.32) до тех пор пока  $x_2(t) < b$  — зоны нечувствительности нелинейности НЭ2, стоящей в



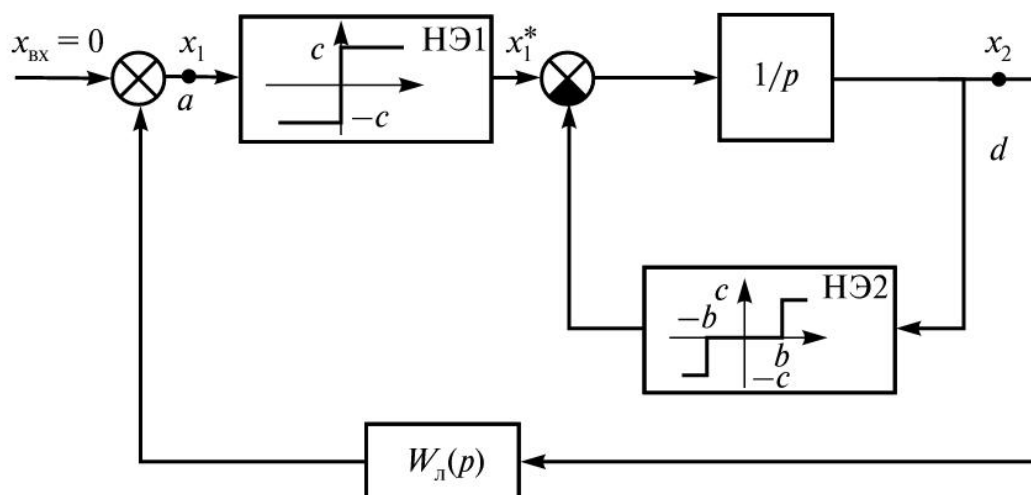


Рис. 8.31. Структурная схема нелинейной системы автоматического управления с двумя нелинейностями

обратной связи интегратора. При  $x_2(t) = b$  сигнал на выходе НЭ2 равен  $c$ , сигнал на входе интегратора равен 0. График функции  $x_2(t)$  при гармоническом входном сигнале  $x_1(t)$  представлен на рис. 8.32. Для того чтобы сигнал на выходе интегратора достигал величины  $b$  (именно при этом значении  $x_2$  «включается» в работу вторая нелинейность НЭ2), необходимо выполнение условия (см. рис. 8.32)

$$\omega t_1 < \pi. \quad (8.120)$$

Так как в точке  $\omega t$  выполняется равенство

$$-b + \int_0^{t_1} c dt = b, \text{ то } t_1 = \frac{2b}{c}.$$

При выполнении условия (8.120)

$$\omega \frac{2b}{c} < \pi.$$

Откуда

$$\omega < \frac{\pi c}{2b}. \quad (8.121)$$

Таким образом, следует рассматривать сигналы  $x_1(t)$  с частотой  $\omega$ , не превышающей величины  $\frac{\pi c}{2b}$ . Величина  $\varphi$  (см. рис. 8.31) определяется из уравнения

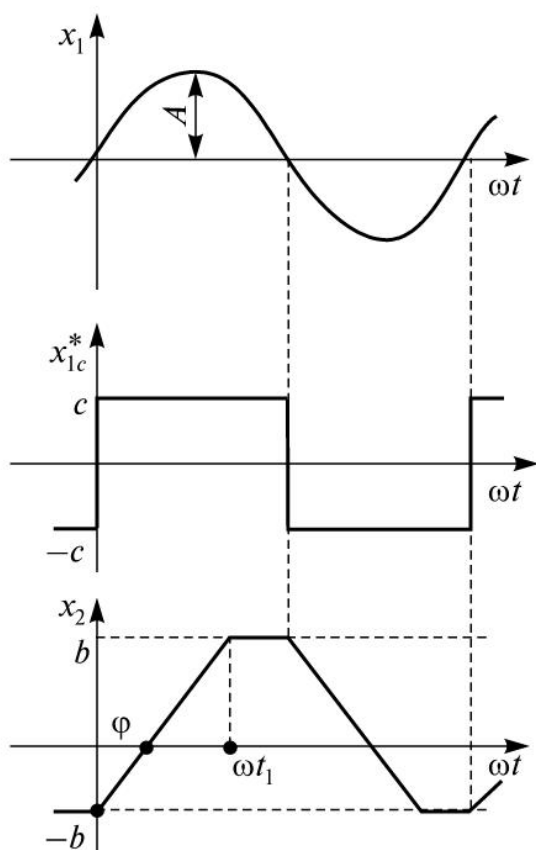


Рис. 8.32. Сигналы в анализируемой нелинейной системе с двумя нелинейностями

$$-b + \int_0^{\frac{\varphi}{\omega}} c dt = 0.$$

Откуда

$$\varphi = \frac{b\omega}{c}. \quad (8.122)$$

Несложно показать, что первая гармоника последовательности  $x_2(t)$  треугольных импульсов с ограничением по амплитуде имеет вид:

$$x_2(t) \approx \frac{4b}{\pi\varphi} \sin \varphi \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{4b}{\pi\varphi} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega t - \frac{4b}{\pi\varphi} \sin^2 \varphi \cdot \cos \omega t, \quad (8.123)$$

где  $\varphi$  — определяется выражением (8.122).

Так как  $\sin \omega t = \frac{x_1}{A}$  и  $\cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d \sin \omega t}{dt} = \frac{1}{\omega A} \frac{dx_1}{dt}$ , то в соответствии с (8.123)

$$x_2 \approx \frac{4b}{\pi A} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} x_1 - \frac{4b}{\pi A \omega} \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} \frac{dx_1}{dt}. \quad (8.124)$$

После подстановки (8.122) в (8.124) получаем:

$$x_2 \approx \frac{4bc}{\pi A} \frac{\sin\left(2\frac{b\omega}{c}\right)}{b\omega} x_1 - \frac{4bc}{\pi A \omega^2} \frac{\sin^2\left(\frac{b\omega}{c}\right)}{b\omega} \frac{dx_1}{dt}.$$

Откуда

$$x_2(j\omega) = \left[ \frac{4c}{\pi A} \frac{\sin\left(2\frac{b\omega}{c}\right)}{\omega} - j\omega \frac{\sin^2\left(\frac{b\omega}{c}\right)}{\pi A \omega^2} \right] e^{j\omega t}. \quad (8.125)$$

Комплексный коэффициент передачи, как следует из 8.125, равен:

$$W_H(jA, \omega) = \frac{2c}{\pi A} \frac{\sin\left(2\frac{b\omega}{c}\right)}{\omega} - j \frac{\sin^2\left(\frac{b\omega}{c}\right)}{\pi A \omega}. \quad (8.126)$$

В этом случае при двух нелинейностях комплексный коэффициент передачи зависит как от амплитуды, так и от частоты входного сигнала. Еще раз подчеркнем, что величина  $\omega$  ограничена сверху неравенством (8.121).

Уравнение гармонического баланса имеет вид:

$$W_{\text{л}}(j\omega)W_{\text{н}}(jA, \omega) = -1. \quad (8.127)$$

#### Пример 8.4

Структурная схема системы автоматического управления с двумя симметричными безынерционными нелинейностями приведена на рис. 8.33. Каждая линейная часть системы  $W_{\text{л1}}(p)$  и  $W_{\text{л2}}(p)$  удовлетворяет гипотезе фильтра. Требуется провести гармоническую линеаризацию системы и записать уравнение гармонического баланса.

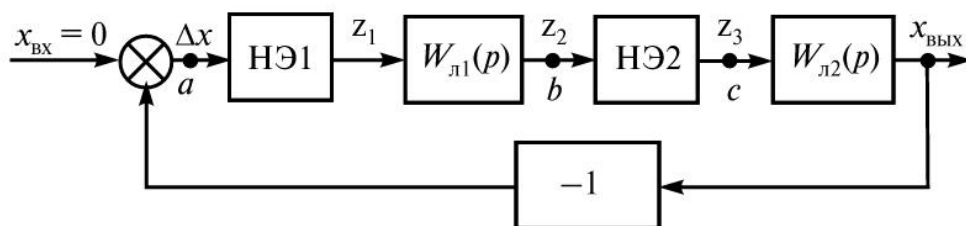


Рис. 8.33. Структурная схема нелинейной системы автоматического управления с двумя нелинейностями

Пусть  $z_1(\Delta x)$  — характеристика нелинейного элемента НЭ1. Комплексный коэффициент передачи этого элемента после линеаризации равен:

$$W_{\text{н1}}(jA_1) = \frac{a_1}{A_1} + j \frac{b_1}{A_1} = |W_{\text{н1}}(jA_1)| e^{j\lambda_1}, \quad (8.128)$$

где  $\lambda_1 = \arctg \frac{b_1}{a_1}$ ,  $A_1$  — амплитуда гармонического сигнала на входе НЭ1, тогда, рассматривая последовательное соединение первого линейного элемента НЭ1 и линейной части  $W_{\text{л1}}(p)$  как одно звено, получаем комплексный коэффициент передачи системы между точками  $a$  и  $b$ :

$$W_{ab}(j\omega, A_1) = W_{\text{н1}}(jA_1)W_{\text{л1}}(j\omega), \quad (8.129)$$

где  $W_{\text{л1}}(j\omega)$  — АФЧХ первой линейной части системы.

Амплитуда  $A_2$  гармонического сигнала на входе НЭ2 в соответствии с (8.129) определяется выражением

$$A_2(\omega) = A_1 |W_{\text{н1}}(jA_1)| |W_{\text{л1}}(j\omega)|, \quad (8.130)$$

где  $|W_{\text{н1}}(jA_1)|$  — модуль комплексного коэффициента передачи НЭ1;

$|W_{\text{л1}}(j\omega)|$  — модуль АФЧХ, т.е. амплитудно-частотная характеристика первой линейной части линейной системы.

Фаза  $\varphi_2$  гармонического сигнала на входе НЭ2 в соответствии с (8.129) имеет вид:

$$\varphi_2(\omega) = \arctg \frac{b_1}{a_1} + \varphi_1(\omega), \quad (8.131)$$

где первое слагаемое определяется видом статической характеристики НЭ1,  $\varphi_1(\omega)$  — фазовая частотная характеристика первой линейной части системы.

Пусть  $z_3(z_2)$  — характеристика нелинейного элемента НЭ2. На входе этого элемента гармонический сигнал имеет амплитуду  $A_2$  и фазу  $\varphi_2$ . После гармонической линеаризации второй нелинейности получаем ее комплексный коэффициент передачи:

$$W_{H2}(jA_2) = \frac{a_1^*}{A_2} + j \frac{b_1^*}{A_2} = |W_{H2}(jA_2)| e^{j\lambda_2}, \quad (8.132)$$

где звездочка обозначает то, что  $a_1^*$  и  $b_1^*$  получены для второй нелинейности,

$$\lambda_2 = \arctg \frac{b_1^*}{a_1^*}.$$

Комплексный коэффициент передачи на участке системы между точками  $a$  и  $c$  (см. рис. 8.33), содержащий две нелинейности, между которыми включена первая линейная часть системы, удовлетворяющая гипотезе фильтра, определяется выражением

$$W_{ac}(jA_1, \omega) = W_{H1}(jA_1) W_{Л1}(j\omega) W_{H2}(jA_2). \quad (8.133)$$

В этом случае уравнение гармонического баланса имеет вид:

$$W_{ac}(jA_1, \omega) W_{Л2}(j\omega) = -1.$$

Откуда, учитывая (8.133), получаем:

$$W_{H1}(jA_1) W_{Л1}(j\omega) W_{H2}(jA_2) W_{Л2}(j\omega) = -1. \quad (8.134)$$

Как следует из рассмотренных примеров, в том случае, **когда линеаризуемый участок системы содержит инерционные звенья, комплексный коэффициент передачи зависит не только от амплитуды, но и от частоты.**

Достоинством метода гармонической линеаризации является то, что он позволяет в рамках принятых допущений определить наличие автоколебаний в системе, их частоту и амплитуду. Метод основан на прозрачных физических представлениях. Вместе с тем учет только первой гармоники может в ряде случаев привести к ошибочным результатам. Последнее определяет многоплановость анализа динамики нелинейных систем.

## Преобразование Лапласа

*Оригиналом* будем называть любую комплексную (следовательно, и любую действительную) функцию  $x(t)$  действительного аргумента  $t$ , удовлетворяющую условиям:

- $x(t)$  — непрерывна на всей оси  $t$  за возможным исключением точек разрыва первого рода в конечном числе на каждом интервале конечной длины;
- $x(t) = 0$ , при  $t < 0$ ;
- существуют числа  $M > 0$  и  $S_0 \geq 0$  такие, что для всех  $t$

$$|x(t)| < Me^{S_0 t},$$

где  $S_0$  — показатель роста функции  $x(t)$ .

*Изображением* функции  $x(t)$  будем называть функцию комплексного переменного  $p = s + j\sigma$ , определяемую соотношением

$$x(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (\text{П1.1})$$

Интеграл в правой части этого равенства называют интегралом Лапласа. Операцию перехода от оригинала к изображению называют преобразованием Лапласа (иначе  $L$ -преобразованием). Переход от оригинала к изображению символически обозначают

$$x(p) = L[x(t)].$$

Изображение  $x(p)$  оригинала  $x(t)$  определено в полуплоскости  $\text{Re}(p) > S_0$ , где  $\text{Re}(p)$  — действительная часть комплексного числа  $p$ ,  $S_0$  — показатель роста  $x(t)$ , т.е.  $x(p)$  определено в тех точках плоскости комплексного переменного, где интеграл Лапласа сходится.

Теорию преобразования Лапласа называют также *операторным исчислением*.

Переход от изображения к оригиналам называют *обратным преобразованием Лапласа*, которое символически обозначают следующим образом:

$$x(t) = L^{-1}[x(p)].$$

Обратное преобразование Лапласа осуществляется по формуле обращения

$$x(t) = L^{-1}[x(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} x(p) e^{pt} dp, \quad (\text{П1.2})$$

где  $c > S_0$  — показатель роста функции  $x(t)$ .

Если изображение является дробно-рациональной функцией

$$x(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \text{ со степенью числителя, меньшей степени знаменате-}$$

ля, имеющего корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  кратностей  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , то оригинал определяют по формуле

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left\{ (p - p_k)^{r_k} e^{pt} \frac{A(p)}{B(p)} \right\}. \quad (\text{П1.3})$$

Если все корни знаменателя дробно-рационального изображения простые, т.е.  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ , то

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (\text{П1.4})$$

где  $B'(p_k) = \left. \frac{dB}{dp} \right|_{p=p_k}$ .

Основные свойства преобразования Лапласа, формулируемые как совокупность теорем, сведены в табл. П1.1.

Изображение некоторых оригиналов, часто встречающихся при анализе и синтезе динамических систем, сведены в табл. П1.2.

Таблица П1.1

№ п/п	Теорема	Область оригиналов	Область изображений
1	2	3	4
1	Линейность	$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$	$x(p) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(p)$
2	Подобие	$x(at), a > 0$	$L[x(at)] = \frac{1}{a} x\left(\frac{p}{a}\right)$

Окончание табл. П1.1

1	2	3	4
3	Смещение	$e^{-at}x(t)$	$L[x(p+a)]$
4	Запаздывания	$x(t-b), b>0,$ $x(t-b)=0$ при $t<b$	$L[x(t-b)] = e^{-bp}x(p)$
5	Дифференцирование оригиналов	$\frac{dx^n(t)}{dt^n}$	$L\left[\frac{dx^n(t)}{dt^n}\right] = p^n x(p) -$ $p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x^{(1)}(0) - \dots - x^{(n-1)}(0),$ где $x^{(i)}(0) = \frac{d^{(i)}x(t)}{dt^i}$ при $t=0$
6	Интегрирование оригиналов	$\int_0^t x(t)dt$	$L\left[\int_0^t x(t)dt\right] = \frac{1}{p} x(p)$
7	Свертка во временной области	$\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$	$L\left[\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right] = x_1(p)x_2(p)$
8	Свертка в комплексной области	$x_1(t)x_2(t)$	$L[x_1(t)x_2(t)] =$ $= \frac{1}{2\pi j} \int_{cj-\infty}^{cj+\infty} x_1(s)x_2(p-s)ds$
9	Дифференцирование изображений	$t^n x_1(t)$	$L[t^n x(t)] = (-1)^n \frac{d^n x(p)}{dp^n}$
10	Интегрирование изображений	$\frac{x(t)}{t}$	$L\left[\frac{x(t)}{t}\right] = \int_p^\infty x(p)dp$
11	Предельные значения оригинала	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$L[\lim_{t \rightarrow 0} x(t)] = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$
		$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$L[\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$

Таблица П1.2

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3	$t$	$\frac{1}{p^2}$
4	$t^n, n — \text{целое}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re}(p) > 0$
5	$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}, \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$
6	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}, \operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $
7	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}, \operatorname{Re}(p) >  \operatorname{Im}(a) $
8	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}, \operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)$
9	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}, \operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)$
10	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}, \operatorname{Re}(p) >  \operatorname{Re}(a) $
11	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}, \operatorname{Re}(p) >  \operatorname{Re}(a) $



## D-преобразование

В данном приложении приведены  $D$ -изображения смещенных функций  $x[n, \varepsilon]$  дискретного аргумента. В том случае, когда требуется найти изображение соответствующей функции  $x[n]$ , в выражении, приведенном в табл. П2.1, принимается  $\varepsilon = 0$ .

Таблица П2.1

Оригинал $x[n, \varepsilon]$	$D$ -изображение $x^*[q, \varepsilon]$
1 при $n = 0$ 0 при $n \neq 0$	1
$1[n]$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$
$n + \varepsilon$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{e^q}{e^q - 1} \varepsilon$
$(n + \varepsilon)^2$	$\frac{e^q (e^q + 1)}{(e^q - 1)^3} + 2 \frac{e^q}{(e^q - 1)^2} \varepsilon + \frac{e^q}{e^q - 1} \varepsilon^2$
$e^{a(n + \varepsilon)}$	$\frac{e^q}{e^q - e^a} e^{a\varepsilon}$
$(n + \varepsilon) e^{a(n + \varepsilon)}$	$\frac{e^q}{(e^q - e^a)^2} e^{a(\varepsilon+1)} + \frac{e^q}{e^q - e^a} e^{a\varepsilon} \varepsilon$
$\cos \omega T(n + \varepsilon)$	$\frac{e^{2q} \cos \omega T \varepsilon - e^q \cos \omega T (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega T + 1}$
$\sin \omega T(n + \varepsilon)$	$\frac{e^{2q} \sin \omega T \varepsilon + e^q \sin \omega T (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega T + 1}$
$e^{a(n + \varepsilon)T} \cos \omega T(n + \varepsilon)$	$\frac{e^{2q} \cos \omega T \varepsilon - e^q e^a \cos \omega T (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q e^a \cos \omega T + e^{2a}} e^{a\varepsilon}$
$e^{a(n + \varepsilon)T} \sin \omega T(n + \varepsilon)$	$\frac{e^{2q} \sin \omega T \varepsilon + e^q e^a \sin \omega T (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q e^a \cos \omega T + e^{2a}} e^{a\varepsilon}$

## Дополнительные математические сведения

**Характеристическая матрица. Характеристический многочлен. Характеристические числа.** Рассмотрим векторное уравнение

$$Y = AX, \quad (\Pi 3.1)$$

где  $Y$  и  $X$  — вектор-столбцы;

$A$  — квадратная матрица порядка  $n$ .

Это уравнение можно трактовать как преобразование вектора  $X$  в вектор  $Y$ . Преобразование вектора  $X$  в пропорциональный ему вектор  $Y$  можно записать в виде

$$Y = AX = \lambda A, \quad (\Pi 3.2)$$

где  $\lambda$  — скаляр, являющийся коэффициентом преобразования.

Это уравнение распишем подробнее:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

И

[illegible]

Умножив левую и правую часть (ПЗ.3) на  $(-1)$ , получаем запись этой однородной линейной системы уравнений в виде

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{X} = \mathbf{0},$$

где  $I$  — единичная матрица.

$$[\lambda I - A]X = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{П3.4})$$

Матрица  $[\lambda I - A]$  называется характеристической матрицей матрицы  $A$ . Как следует из (П3.4), определитель характеристической матрицы является многочленом от  $\lambda$  степени  $n$ . Действительно, произведение стоящих на главной диагонали элементов будет многочленом от  $\lambda$  со старшим членом  $\lambda^n$ . Остальные элементы определителя не содержат всех элементов, стоящих на главной диагонали, и потому их степень не превосходит  $n$ .

Многочлен от  $\lambda$  — определитель матрицы  $\lambda I - A$ , называется характеристическим многочленом матрицы  $A$ , а уравнение

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (\text{П3.5})$$

называется характеристическим уравнением матрицы  $A$ . Так как  $P(\lambda)$  — определитель матрицы  $\lambda I - A$ , то уравнение (П3.5) может быть записано в форме

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = 0, \quad (\text{П3.6})$$

откуда с учетом (П3.5) следует:

$$P(0) = |-A| = a_n. \quad (\text{П3.7})$$

Если многочлен  $P(\lambda)$  записать в виде произведения сомножителей

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — корни характеристического многочлена.

Если положить  $\lambda = 0$ , то с учетом (П3.7)

$$P(0) = (-1)^n |A| = (-1)^n (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n) = a_n.$$

Откуда определитель матрицы  $A$

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \quad (\text{П3.8})$$

Корни характеристического многочлена матрицы  $A$  называются *характеристическими числами* матрицы  $A$ .

Из (ПЗ.8) следует, что произведение характеристических чисел равно определителю матрицы  $A$ .

Сумма элементов, стоящих на главной диагонали матрицы  $A$ , называется следом матрицы  $A$  и обозначается  $T_r[a_{ii}]$ , т.е.

$$T_r[a_{ii}] = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}.$$

Все коэффициенты характеристического уравнения могут быть определены через элементы матрицы  $A$  в соответствии со следующей рекуррентной процедурой:

$$\begin{aligned} a_1 &= -T_1; \\ a_2 &= -\frac{1}{2}(a_1 T_1 + T_2); \\ a_3 &= -\frac{1}{3}(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3); \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= -\frac{1}{n}(a_{n-1} T_1 + a_{n-2} T_2 + \dots + a_1 T_{n-1} + T_n), \end{aligned} \tag{ПЗ.9}$$

где  $T_1$  — след матрицы  $A$ ;  
 $T_2$  — след матрицы  $A^2$ ;  
 $\dots$   
 $T_n$  — след матрицы  $A^n$ .

Эти формулы известны как формулы Бохера [12].

**Пример ПЗ.1**

Найти характеристические числа матрицы  $A$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

На основании формулы Бохера

$$a_1 = -T_1 = -(2+1-1) = -2.$$

Матрица  $A^2$ :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 T_1 + T_2) = -\frac{1}{2}[(-2) \cdot 2 + (5 + 2 + 7)] = -5.$$

Подобным образом

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 3 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{bmatrix}$$

и

$$a_3 = -\frac{1}{3}(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3) = -\frac{1}{3}[(-5) \cdot 2 + (-2) \cdot (5 + 2 + 7) + (14 + 3 + 3)] = 6.$$

Следовательно, характеристическое уравнение матрицы  $A$  следующее:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Решив это кубическое уравнение, получаем характеристические числа матрицы  $A$ :  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 3$ . Следовательно,

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными и комплексными. Если  $\lambda_i$  — комплексный корень, то сопряженное комплексное число  $\lambda_i^*$  также является корнем характеристического уравнения (при условии, что коэффициенты уравнения действительные числа). В общем случае корни характеристического уравнения могут быть различными и кратными.

**Миноры и алгебраические дополнения.** Если в определителе  $|A|$  этой матрицы вычеркнуть  $k$  строк и  $k$  столбцов, где  $1 \leq k \leq n-1$ , то элементы, стоящие на пересечении, образуют матрицу порядка  $k$ , определитель которой называют минором  $k$ -го порядка определителя  $|A|$ . Можно сказать также, что минор  $k$ -го порядка есть определитель, получающийся после вычеркивания в определителе  $|A|$   $n-k$  строк и  $n-k$  столбцов. В частности, при вычеркивании в определителе

теле одной, например  $i$ -й строки, и одного, например  $j$ -го столбца, мы получаем минор порядка  $n-1$ . Итак, после вычеркивания в определителе  $|A|$   $k$  строк и  $k$  столбцов можно рассматривать два минора: один минор  $M$  порядка  $k$  — определитель, элементы которого стоят на пересечении вычеркнутых строк и столбцов, и дополнительный для  $M$  минор  $M'$  порядка  $n-k$ , состоящего из тех элементов определителя  $|A|$ , которые не стоят на пересечении выбранных  $k$  строк и  $k$  столбцов. Если минор  $M$ , имеющий порядок  $k$ , расположен в строках с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и в столбцах с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , то назовем его *алгебраическим дополнением* минор  $M'$ , умноженный на  $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}$ . Итак, алгебраическое дополнение минора  $M$  есть его дополнительный минор  $M'$ , знак перед которым определяется в зависимости от того, четная или нечетная сумма номеров строк и столбцов, на которых расположен минор  $M$ . В частности, если  $a_{ij}$  — элемент определителя  $|A|$  рассматривать как минор порядка  $n-1$ , то его алгебраическим дополнением  $C_{ij}$  будет определитель  $M_{ij}$ , оставшийся после вычеркивания в определителе  $|A|$   $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, умноженный на  $(-1)^{i+j}$ , т.е.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Алгебраические дополнения  $C_{ij}$  уже были использованы ранее в примере 6.5.

Линейная независимость векторов. Столбцы матрицы  $A$  будем рассматривать как векторы  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Линейную комбинацию векторов будем определять как вектор

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — числовые коэффициенты.

Векторы  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) считаются линейно независимыми, если при любых коэффициентах  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  хотя бы один из которых отличен от нуля, выполняется неравенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \neq 0.$$

Иначе, если векторы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  линейно зависимые, то ни один из них не может быть выражен как линейная комбинация других. Известно, что, если определитель  $|A|$  квадратной матрицы  $A$  отличен от нуля, ее столбцы и строки линейно независимы. Если  $|A| = 0$ , матрица  $A$  называется особенной (или вырожденной). При

$|A| \neq 0$  матрица — неособенная (невырожденная). Обратные матрицы существуют только у неособенных матриц.

Рангом  $r$  матрицы  $A$  является наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы  $A$ . Если порядок квадратной матрицы равен  $n$ , то величина  $q = n - r$  называется дефектом матрицы.

Очевидно, что у неособенной квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  ранг  $r = n$ .

У особенной квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  ранг  $r < n$ .

Введем далее *скалярное произведение векторов*:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Скалярное произведение векторов  $a$  и  $c$  будем обозначать  $\langle ac \rangle$ . В том случае, когда элементы векторов комплексные числа,

$$\langle ac \rangle = a^* T c,$$

где  $a^*$  — вектор, все элементы которого являются комплексно сопряженными числами для элементов вектора  $a$ ;

$a^* T$  — транспонированный вектор-столбец, т.е. вектор-строка.

Пусть

$$a = \begin{bmatrix} a_1 + jb_1 \\ a_2 + jb_2 \\ \dots \\ a_n + jb_n \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} c_1 + jb_1 \\ c_2 + jb_2 \\ \dots \\ c_n + jb_n \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle ac \rangle &= [a_1 - jb_1, a_2 - jb_2, \dots, a_n - jb_n] \cdot \begin{bmatrix} c_1 + jb_1 \\ c_2 + jb_2 \\ \dots \\ c_n + jb_n \end{bmatrix} = \\ &= (a_1 - jb_1)(c_1 + jb_1) + (a_2 - jb_2)(c_2 + jb_2) + \dots + (a_n - jb_n)(c_n + jb_n). \end{aligned}$$

Если элементы векторов  $a$  и  $c$  действительные числа, то

$$\langle ac \rangle = a^T c = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n.$$

**Ортогональность векторов.** Векторы  $a$  и  $c$  ортогональны, если их скалярное произведение равно 0, т.е.

$$\langle ac \rangle = a^{*T} c = 0.$$

**Нормой** (длиной) вектора

$$a = \begin{bmatrix} a_1 + jb_1 \\ a_2 + jb_2 \\ \dots \\ a_n + jb_n \end{bmatrix}$$

будем называть

$$N = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2}, \text{ т.е.}$$

$$N = \sqrt{a^{*T} a} = \sqrt{\langle aa \rangle}.$$

Если элементы вектора  $a$  — действительные числа, то все  $b_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и

$$N = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\langle aa \rangle} = \sqrt{a^T a}.$$

**Решение системы линейных однородных уравнений. Характеристические векторы матрицы. Модальная матрица. Присоединенная матрица.** Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$ . Как следует из (П3.4), для каждого характеристического числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$  получаем систему линейных однородных уравнений, матричный вид которой следующий:

$$[\lambda_i I - A]X = 0. \quad (\text{П3.10})$$

Так как  $[\lambda_i I - A]X = 0$ , то существуют ненулевые решения этой системы. Ненулевой вектор  $X_i$ , являющийся решением системы (П3.10) называется *характеристическим вектором*, относящимся к характеристическому числу  $\lambda_i$ . Как следует из (П3.4), для характеристического вектора  $X_i$  выполняется равенство



$$AX_i = \lambda_i X_i.$$

Можно показать, что если все характеристические числа матрицы  $A$   $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  действительны и различны, то соответствующие им характеристические векторы  $X_1, X_2, \dots, X_n$  линейно независимы.

Так как уравнение (ПЗ.10) однородное, то  $k_i X_i$ , где  $k_i$  — произвольная скалярная величина, также служит решением. Иначе, если  $X_i$  — характеристический вектор, то  $kX_i$  (при  $k \neq 0$ ) также характеристический вектор. Матрица, составленная из  $n$  характеристических векторов, называется *модальной матрицей*.

Определим далее ранг матрицы  $[\lambda_i I - A]$ , когда характеристические числа различны. Так как матрица  $[\lambda_i I - A] = 0$ , то ее определитель  $|\lambda_i I - A| = 0$  и, следовательно, матрица является особенной, т.е. ее ранг  $r < n$ . Покажем далее, что ранг матрицы  $[\lambda_i I - A]$  при различных  $\lambda_i$  не может быть меньше  $n - 1$ . Предположим, что ранг равен  $n - 2$ . Тогда все миноры определителя, порядок которых равен  $n - 1$ , равнялись бы нулю. Известно, что определитель может быть вычислен путем разложения по элементам строки. Так, определитель квадратной матрицы  $B$  порядка  $n$  вычисляются по следующей формуле:

$$|B| = \sum_{j=1}^n b_{ij} C_{ij}, \quad (\text{ПЗ.11})$$

где  $b_{ij}$  элементы  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $[B]$ ;

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ,  $M_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — миноры  $n - 1$  порядка.

В соответствии с (ПЗ.11) производная определителя  $|B|$  равна

$$\frac{d|B|}{db_{ij}} = C_{ij}. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Тогда при предположении, что ранг матрицы  $[\lambda_i I - A]$  равен  $n - 2$ , все миноры  $M_{ij}$  этой матрицы, порядок которых равен  $n - 1$ , равняются 0 и

$$\frac{a}{a\lambda} (|\lambda I - A|) \big|_{\lambda_i} = 0.$$

Откуда следует, что корень  $\lambda_i$  — кратный. Это противоречит предположению о различии всех характеристических чисел. Таким обра-

зом, ранг матрицы  $[\lambda_i I - A]$ , у которой все характеристические числа различны, равен  $n-1$ . Для матрицы, ранг которой равен  $n-1$ , столбцы модальной матрицы могут выбираться равными или пропорциональными произвольному столбцу присоединенной матрицы. В рассматриваемом случае столбцы модальной матрицы равны или пропорциональны произвольному ненулевому столбцу присоединенной матрицы  $Adj[\lambda_i I - A]$ . Следовательно, при фиксированном  $\lambda_i$  выбирается произвольный ненулевой столбец (или столбец пропорциональный ему) матрицы  $Adj[\lambda_i I - A]$ . Так как число различных характеристических чисел равно  $n$ , то число характеристических векторов равно  $n$  и, следовательно, число столбцов в модальной матрице равно  $n$ .

Напомним способ получения присоединенной матрицы (этим способом уже пользовались в примере 6.2).

Присоединенной для  $B$  матрицей  $Adj B$  называется матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения, т.е.

$$Adj B = [C_{ij}]^T = [C_{ji}].$$

### Пример ПЗ.2

Найти модальную матрицу, соответствующую матрице  $A$ , заданной в примере ПЗ.1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы  $A$  и его корни вычислены в примере ПЗ.1:  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = -2$ ;  $\lambda_3 = 3$ . Найдем присоединенную матрицу  $Adj[\lambda_i I - A]$ . При заданной  $[A]$  матрица  $[\lambda_i I - A]$  определяется выражением

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4;$$

$$\begin{aligned}
C_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -2\lambda + 7; \\
C_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda + 2; \\
C_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 5; \\
C_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & \lambda-1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \lambda + 2; \\
C_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 8; \\
C_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \lambda-1 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 5; \\
C_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda + 1; \\
C_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4.
\end{aligned}$$

Присоединенная матрица

$$\begin{aligned}
dj[\lambda I - A] &= \begin{bmatrix} \lambda^2 - 4 & \lambda + 2 & \lambda + 2 \\ -2\lambda + 7 & \lambda^2 - \lambda - 5 & 3\lambda - 8 \\ 3\lambda - 5 & \lambda + 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{bmatrix}^T = \\
&= \begin{bmatrix} \lambda^2 - 4 & -2\lambda + 7 & 3\lambda - 5 \\ \lambda + 2 & \lambda^2 - \lambda - 5 & \lambda + 1 \\ \lambda + 2 & 3\lambda - 8 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

При  $\lambda_1 = 1$  присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

При  $\lambda_2 = -2$  присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

При  $\lambda_3 = 3$  присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Выбираем из каждой матрицы один столбец (или столбец, все элементы которого умножены на  $k \neq 0$ ). В результате записываем модальную матрицу

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном примере из присоединенной матрицы при  $\lambda_1 = 1$  выбран первый характеристический вектор-столбец, каждый элемент которого умножен на  $k = \frac{1}{3}$ ; из присоединенной матрицы при  $\lambda_2 = -2$  выбран второй характеристический вектор; из присоединенной матрицы при  $\lambda_3 = 3$  выбран второй характеристический вектор.

В рассмотренном примере характеристические числа  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) были действительными. В общем случае из  $n$  характеристических чисел может быть  $2k \leq n$  комплексных, т.е. среди  $n$  различных характеристических чисел  $k$  пар сопряженных комплексных чисел. Следовательно, элементы модальной матрицы  $M$  в общем случае комплексные числа. Комплексному числу в  $i$ -м столбце и в  $l$ -й строке модальной матрицы соответствует сопряженное ему комплексное число в некотором столбце и той же строке.

**Базис векторного пространства характеристических векторов. Ортонормированный базис.** Модальная матрица при различных характеристических числах имеет ранг  $n$ , т.е. ее столбцы и строки линейно независимы. Совокупность  $n$  линейно независимых векторов определяет *базис  $n$ -мерного векторного пространства*. Обозначим вектора-столбцы модальной матрицы как  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Тогда лю-

бой вектор  $X$  векторного пространства решений уравнения (П3.10) есть линейная комбинация векторов базиса:

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i,$$

где  $\alpha_i$  — скаляры.

Пусть далее  $M$  модальная матрица порядка  $n$ , столбцы которой являются базисом векторного пространства решений системы линейных однородных уравнений (П3.10). Если  $M^{-1}$  — матрица, обратная модальной  $M$ , то  $M^{-1}M = I$ , т.е.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{j1} \\ m_{j2} \\ \dots \\ m_{jn} \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{П3.13})$$

где  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ .

Вектора-строки матрицы, обратной к модальной, линейно независимы. Они образуют так называемый двойственный базис векторного пространства и, в соответствии с (П3.13), обладают свойством

$$\langle r_i m_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера [12].

Рассмотрим решение задачи определения *ортogonalного базиса*. Даны векторы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  базиса  $n$ -мерного пространства. Требуется найти новый базис того же пространства, векторы  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  которого должны удовлетворять следующему соотношению:

$$\langle y_i y_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Так как скалярные произведения векторов  $Y_i$  и  $Y_j$  равны 0 при  $i \neq j$ , то векторы искомого базиса ортогональны. Равенство  $\langle Y_i Y_i \rangle = 1$  свидетельствует об единичной длине вектора  $Y_i$ . Следовательно, искомый базис — ортонормированный. Векторы  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) искомого базиса принадлежат рассматриваемому векторному пространству и также являются линейной комбинацией векторов  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , т.е.  $i$ -й вектор  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ортонормированного базиса

$$Y_i = \sum_{j=1}^n k_{ji} m_j. \quad (\text{П3.14})$$

Умножим в соответствии с определением скалярного произведения обе части этого выражения на вектор  $r_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\langle r_l Y_i \rangle = \sum_{j=1}^n k_{ji} (\langle r_l m_j \rangle).$$

Учитывая (П3.13),

$$\langle r_l Y_i \rangle = k_{li}, \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

и с учетом (П3.14)

$$Y_i = \sum_{l=1}^n (\langle r_l Y_i \rangle) m_l, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{П3.15})$$

Последнее выражение определяет  $n$  уравнений для вычисления ортонормированного базиса, если известна модальная матрица  $M$  и  $M^{-1}$  при различных корнях характеристического уравнения.

**Кратные корни характеристического многочлена.** Выше рассматривалась модальная матрица при различных характеристических

числах. В случае кратных корней [7] определение линейно независимых столбцов модальной матрицы не очевидно. Причина состоит в том, что не существует однозначного соответствия между кратностью корня характеристического уравнения и кратностью вырождения (дефекта)  $q$ . Если  $\lambda_i$  — корень кратности  $p$ , то дефект характеристической матрицы не может быть больше  $p$  и число линейно независимых векторов — решений системы (ПЗ.10) не превосходит  $p$ . При  $q < p$  можно найти для  $\lambda_i$  только  $q$  линейно независимых характеристических векторов.

В случае равенства дефекта матрицы  $[\lambda_i I - A]$  единице ( $q = 1$ ) столбец модальной матрицы — вектор решения системы (ПЗ.10) может выбираться пропорциональным любому ненулевому столбцу  $AdjB[\lambda_i I - A]$ . Это единственный столбец, который можно получить для системы, имеющей  $p$  равных характеристических чисел.

Доказано, что при  $q > 1$  матрица  $AdjB[\lambda_i I - A]$  и все ее производные, включая

$$\frac{d^{q-2}}{d\lambda^{q-2}} \{Adj[\lambda_i I - A]\}_{\lambda_i=\lambda},$$

есть ненулевые матрицы;  $q$  линейно независимых векторов — решений системы (ПЗ.10) можно получить из столбцов дифференцированных ненулевых присоединенных матриц. Например, при  $q = p$ ,  $p$  различных столбцов модальной матрицы можно получить из ненулевых столбцов

$$\frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}} \{Adj[\lambda I - A]\}_{\lambda=\lambda_i}.$$

Особый случай соответствует симметрической матрице  $A$  — матрице, в которой  $a_{ij} = a_{ji}$ . При этом дефект  $\{\lambda I - A\}$  при корне кратности  $p$  в точности равен  $p$ . Следовательно, можно найти  $p$  линейно независимых векторов модальной матрицы. Симметрическая матрица с действительными числами достаточно часто встречается в моделях линейных электрических цепей.

**Диагонализация квадратной матрицы.** Модальная матрица  $M$  системы уравнений (ПЗ.10) при различных характеристических числах — неособенная квадратная матрица, т.е. матрица, у которой есть обратная  $M^{-1}$ .

Пусть матрица  $M$  имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix},$$

где  $n$  линейно независимых столбцов — решения системы уравнений (ПЗ.10), соответствующие  $n$  различным характеристическим числам матрицы  $A$ . Тогда система (ПЗ.10) после подстановки соответствующих столбцов модальной матрицы имеет вид:

$$[\lambda_i I - A]m_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $m_i = \begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ \dots \\ m_{ni} \end{bmatrix}$  —  $i$ -й столбец модальной матрицы.

Откуда

$$\begin{bmatrix} \lambda_i m_{1i} \\ \lambda_i m_{2i} \\ \dots \\ \lambda_i m_{ni} \end{bmatrix} = A m_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ \dots \\ m_{ni} \end{bmatrix}, \quad (\text{ПЗ.16})$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Объединив систему уравнений для разных  $i$ , получаем:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 m_{11} & \lambda_2 m_{12} & \dots & \lambda_n m_{1n} \\ \lambda_1 m_{21} & \lambda_2 m_{22} & \dots & \lambda_n m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 m_{n1} & \lambda_2 m_{n2} & \dots & \lambda_n m_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$



или

$$\Lambda M = AM, \quad (\text{ПЗ.17})$$

где  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$  — диагональная матрица, состоящая из  $n$  характери-

стических чисел.

Умножив левую и правую части уравнения (ПЗ.17) слева на  $M^{-1}$ , получим:

$$M^{-1}M\Lambda = M^{-1}AM.$$

Так как  $M^{-1}M = I$ , а  $I\Lambda = \Lambda$ , то

$$\Lambda = M^{-1}AM. \quad (\text{ПЗ.18})$$

Более высокие степени матрицы  $A$  приводятся к диагональному виду таким же образом. Например,

$$\Lambda^2 = (M^{-1}AM)(M^{-1}AM) = M^{-1}A^2M.$$

Рассмотренный способ преобразования матриц называется преобразованием подобия.

### **Пример ПЗ.3**

Привести матрицу  $A$ , заданную в примере ПЗ.1, к диагональной форме:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

В примере ПЗ.2 получена модальная матрица этой матрицы  $A$ :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При наличии кратных корней характеристического уравнения квадратная матрица в общем случае не преобразуется к диагональной форме. Результатом преобразования является жорданова матрица.

**Жорданова нормальная форма матрицы.** Будем рассматривать квадратные матрицы порядка  $n$ , элементы которых в общем случае — комплексные числа. Жордановой клеткой порядка  $k$ , относящейся к числу  $\lambda_0$ , называется матрица порядка  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , имеющая вид:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Здесь на главной диагонали находятся числа  $\lambda_0$ , ближайшая сверху параллель главной диагонали состоит из единиц, остальные элементы — нули. Примерами жордановых клеток первого, второго и третьего порядка соответственно являются следующие матрицы:

$$[\lambda_0], \quad \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

*Жордановой матрицей* порядка  $n$  называется матрица порядка  $n$ , имеющая вид:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_S \end{bmatrix}.$$

Здесь вдоль главной диагонали идут жордановы клетки  $J_1, J_2, \dots, J_S$  некоторых порядков, не обязательно различных, относящихся к некоторым числам, также необязательно различным, все места вне этих клеток заняты нулями. При этом  $n \geq S \geq 1$ . Откуда следует, что одна жорданова клетка порядка  $n$  также является жордановой матрицей.

Если рассматривать диагональную матрицу как совокупность жордановых клеток первого порядка, то в общем случае квадратная матрица  $A$ , имеющая как различные, так и кратные характеристические числа, приводима к жордановой нормальной форме.

Так, например, если жорданова нормальная форма матрицы  $A$  имеет вид, приведенный ниже, то ее характеристическое уравнение имеет корни:  $\lambda_1$  — кратности 1,  $\lambda_2$  — кратности 2,  $\lambda_3$  — кратности 3. Тогда  $A$  приводится к виду:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Назовем *преобразующей* матрицей  $T$  — неособенную квадратную матрицу порядка  $n$ , удовлетворяющую соотношению:

$$A = TJT^{-1}. \quad (\text{П3.19})$$

Тогда, умножив справа обе части этого уравнения на матрицу  $T$  и перенеся все члены влево, получаем:

$$AT - TJ = 0.$$

Это матричное уравнение относительно  $T$  равносильно системе  $n^2$  линейных однородных уравнений относительно  $n^2$  неизвестных коэффициентов матрицы  $T$ . Определение преобразующей матрицы  $T$  сводится к решению этой системы из  $n^2$  однородных линейных уравнений. При этом из множества решений необходимо выбрать такое решение, для которого определитель матрицы  $T$  не равен 0.

Из матричного уравнения (П3.19) следует, что

$$AT = TJ,$$

откуда

$$J = T^{-1}AT. \quad (\text{П3.20})$$

Таким образом, знание матрицы  $T$  позволяет привести матрицу  $A$  к жордановой нормальной форме  $J$ .

---

## Использованная литература

1. Автоматизация электроподвижного состава: учебник для вузов ж.-д. трансп. / А.Н. Савоськин, Л.А. Баранов, А.В. Плакс, В.П. Феоктистов; под ред. А.Н. Савоськина. — М.: Транспорт, 1990. — 311 с.
2. Александровский А.М., Егоров С.В., Кузин А.Е. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими объектами. — М.: Энергия, 1973. — 272 с.
3. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб.: Наука, 1999. — 467 с.
4. Бабин А.С., Копанев А.С. Результаты испытаний опытных электровазов переменного тока типа ВЛ85 // Электровазовостроение. — 1984. — Т. 25. — С. 3—22.
5. Баранов Л.А. Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 306 с.
6. Баранов Л.А. Модели систем автоматического управления: учебник. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МИИТ, 2008. — 552 с.
7. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
8. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. — СПб.: Профессия, 2003. — 752 с.
9. Бессонов А.А., Мороз А.В. Надежность систем автоматического регулирования. — Л.: Энергоатомиздат, 1984. — 216 с.
10. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. — 2-е изд. — М.: Наука, 1983. — 340 с.
11. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
13. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. — М.: Наука, 1970. — 620 с.
14. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

15. *Джури Э.* Импульсные системы автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1963. — 456 с.
16. *Изерман Р.* Цифровые системы управления // Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 541 с.
17. *Капустин Л.Д., Копанев А.С, Лозановский А.Л.* Надежность и эффективность электровозов ВЛ80Р в эксплуатации. — М.: Транспорт, 1986. — 240 с. (Межизд. сер. «Надежность и качество».)
18. *Красовский А.А., Поспелов Г.С.* Основы автоматики и технической кибернетики. — М.: Госэнергоиздат, 1962. — 600 с.
19. *Ла Салль Ж., Левшиц С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.
20. *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехтеоретиздат, 1951.
21. *Мартынов Е.М.* Синхронизация в системах передачи дискретных сообщений. — М.: Связь, 1972. — 216 с.
22. Метод Гольдфарба в теории регулирования (сборник статей). — М.: Госэнергоиздат, 1962.
23. *Назаров М.В., Кувшинов В.И., Попов О.В.* Теория передачи сигналов. — М.: Связь, 1970. — 368 с.
24. *Наумов Б.М., Скрипка А.Г.* Система автоматического управления электровоза ВЛ85 // Сб. науч. тр. Всесоюз. научно-исслед. проектно-конструктор. и технолог. ин-та электровозостроения. — 1980. — Т. 21. — С. 21—29.
25. *Никифоров Б.Д., Головин В.И., Кутыев Ю.Г.* Автоматизация управления торможением поездов. — М.: Транспорт, 1985. — 263 с.
26. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1978. — 256 с.
27. *Попов Е.П., Пальтов И.П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1960.
28. Проектирование систем управления электроподвижным составом / Н.А. Ротанов, Д.Д. Захарченко, А.В. Плакс и др.; под ред. Н.А. Ротанова. — М.: Транспорт, 1986. — 327 с.
29. Системы автоматического и телемеханического управления электроподвижным составом / Л.А. Баранов, Е.В. Ерофеев, В.И. Астрахан и др.; под ред. Л.А. Баранова. — М.: Транспорт, 1984. — 311 с.
30. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. — М.: Физматлит, 1987. — 712 с.

31. Теория автоматического управления / Под ред. В.В. Солодовникова (в двух книгах). — М.: Машиностроение, 1967.

32. Теория автоматического управления: учеб. для вузов. В 2-х ч. / Под ред. А.А. Воронова. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1986 г.

33. Теория автоматического управления: учебник для вузов. В 2-х ч. / Под ред. А.В. Нетушила. — М.: Высшая школа, 1972.

34. Теория автоматического управления: В 2 ч. / М.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др.; под ред. А.А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1986. — 504 с.

35. Теория автоматического управления: нелинейные системы управления при случайных воздействиях / А.В. Нетушил, А.В. Балтрушевич, В.В. Бурляев и др.; под ред. А.В. Нетушила. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1983. — 432 с.

36. *Тихменев Б.Н., Трахтман Л.М.* Подвижной состав электрифицированных железных дорог. Теория работы электрооборудования. Электрические схемы и аппараты: учебник для вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Транспорт, 1980. — 471 с.

37. *Ту Ю.* Современная теория управления. — М.: Машиностроение, 1971. — 472 с.

38. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 534 с.

39. *Цыпкин Я.З.* Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1968. — 400 с.

40. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977.

41. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1963. — 456 с.

42. *Гарг В.К., Дукипатти Р.В.* Динамика подвижного состава: пер. с англ. / Под ред. Н.А. Панькина. — М.: Транспорт, 1988. — 391 с.

---

---

## Оглавление

Введение .....	3
Глава 1. ПОНЯТИЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ .....	5
1.1. Основные понятия .....	5
1.2. Уровни автоматизации .....	7
1.3. Техничко-экономическая эффективность автоматизации .....	10
Глава 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СХЕМЫ САУ ЭЛЕКТРОПОДВИЖНОГО СОСТАВА .....	12
2.1. Понятие о функциональной схеме и устройстве .....	12
2.2. Типовые функциональные схемы и принципы управления .....	14
2.3. Классификация систем автоматического управления .....	17
2.4. Типовые функциональные схемы САУ электроподвижного состава .....	23
2.5. Функциональные схемы САУ, применяемые на отечественном электроподвижном составе .....	34
Глава 3. МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	55
3.1. Понятие о модели САУ. Классификация САУ по виду моделей ...	55
3.2. Модели «вход—выход» односвязных непрерывных линейных стационарных САУ (модели классической теории управления) и способы их исследования .....	64
3.3. Понятие об устойчивости линейных систем. Условия устойчивости А.М. Ляпунова .....	82
Глава 4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ .....	87
4.1. Частотные характеристики устойчивых систем .....	87
4.2. Способы представления частотных характеристик .....	93
4.3. Связь частотных и временных характеристик .....	100
Глава 5. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОСВЯЗНЫХ, ЛИНЕЙНЫХ, НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	104
5.1. Структурные схемы и звенья динамических систем .....	104



5.2. Правила изображения и преобразования структурных схем .....	132
5.3. Структурные схемы, передаточные функции и уравнения САУ ...	138
5.4. Частотные характеристики разомкнутых и замкнутых САУ .....	148
5.5. Установившийся режим работы САУ .....	152
<b>Глава 6. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ .....</b>	
6.1. Модели односвязных непрерывных линейных стационарных САУ .....	155
6.2. Модели многосвязных непрерывных линейных стационарных систем автоматического управления .....	170
6.3. Нормальная форма уравнения состояний линейной стационарной системы .....	183
6.4. Определение реакции линейной стационарной системы на заданный входной сигнал при использовании матричных моделей .....	190
6.5. Определение реакции САУ на заданный входной сигнал при использовании фундаментальной матрицы .....	209
<b>Глава 7. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ .....</b>	
7.1. Импульсные методы модуляции .....	213
7.2. Модели разомкнутых импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией .....	220
7.3. Модели разомкнутых линейных импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией при задании непрерывной части системы матричными уравнениями .....	230
7.4. Модель разомкнутой импульсной системы с широтно-импульсной модуляцией .....	233
7.5. Разностные уравнения как модель цифровых систем .....	244
7.6. Дискретные преобразования Лапласа .....	250
7.7. Определение реакции системы, модель которой задана линейными разностными уравнениями, на входной сигнал .....	267
7.8. Передаточная функция разомкнутой линейной импульсной системы .....	275
7.9. Функциональная схема и математическая модель цифровой системы управления с обратной связью .....	283
7.10. Устойчивость линейных импульсных систем .....	296

Глава 8. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ....	301
8.1. Основные определения. Статическая и динамическая нелинейности .....	301
8.2. Способы исследования нелинейных систем .....	308
8.3. Определение статических характеристик группы нелинейных звеньев .....	314
8.4. Переходные процессы в нелинейной системе с существенно нелинейными звеньями .....	317
8.5. Фазовая плоскость. Многолистная фазовая плоскость .....	324
8.6. Устойчивость нелинейных систем .....	330
8.7. Оценка устойчивости нелинейных систем по уравнениям первого приближения .....	334
8.8. Прямой метод Ляпунова .....	335
8.9. Метод гармонической линеаризации .....	340
<i>Приложение 1. Преобразование Лапласа .....</i>	<i>370</i>
<i>Приложение 2. D-преобразование .....</i>	<i>374</i>
<i>Приложение 3. Дополнительные математические сведения .....</i>	<i>375</i>
Использованная литература .....	394

*Учебное издание*

Баранов Леонид Аврамович  
Савоськин Анатолий Николаевич  
Пудовиков Олег Евгеньевич  
Чучин Антон Александрович  
Якушев Алексей Яковлевич

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ  
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПОДВИЖНЫМ  
СОСТАВОМ

В трех частях

Часть 1

Теория автоматического управления

Под редакцией  
Л.А. Баранова и А.Н. Савоськина

*Учебник*

---

Подписано в печать 14.10.2011 г.  
Формат 60×84/16. Печ. л. 25,0. Тираж 700 экз. Заказ  
ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию  
на железнодорожном транспорте»  
105082, Москва, ул. Бакунинская, д. 71  
Тел.: +7 (495) 739-00-30, e-mail: [info@umczdt.ru](mailto:info@umczdt.ru);  
<http://www.umczdt.ru>

---